

1. Aufgabe:

Eigenwerte und Populationswachstum (Fuchs-Hasen-Modell)

Stellen Sie sich vor, Sie beobachten die Entwicklung von Füchsen und Hasen in einem kleinen Waldgebiet über ein Jahr.

- h_n : Anzahl der Hasen zu Beginn des Jahres
- f_n : Anzahl der Füchse zu Beginn des Jahres

Die Population im Folgejahr ($n + 1$) lässt sich durch folgende lineare Transformation beschreiben:

- Die Anzahl der Hasen verdreifacht sich, aber 2 Füchse pro Hase fressen einen Teil:
 $h_{n+1} = 3h_n - 1f_n$
- Die Anzahl der Füchse hängt von den vorhandenen Hasen ab:
 $f_{n+1} = 1h_n + 1f_n$

Das lässt sich als Matrixgleichung schreiben:

$$\begin{pmatrix} h_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} h_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

Frage: Gibt es ein festes Verhältnis von Hasen zu Füchsen, bei dem sich das Verhältnis von Jahr zu Jahr nicht ändert, sondern die Population nur skaliert (wächst oder schrumpft)?

Lösung:

1. Eigenwerte berechnen: ($\det(A - \lambda I) = 0$)

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(1 - \lambda) - (-1 \cdot 1) = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

Dies ist eine binomische Formel: $(\lambda - 2)^2 = 0$

Der Eigenwert ist $\lambda = 2$ (mit Vielfachheit 2).

2. Eigenvektor berechnen ($(A - \lambda I)v = 0$) Setze $\lambda = 2$ in $(A - \lambda I)v = 0$ ein:

$$\begin{pmatrix} 3 - 2 & -1 \\ 1 & 1 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das führt auf das Gleichungssystem: $1x - 1y = 0 \implies x = y$

Ein möglicher Eigenvektor ist also $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

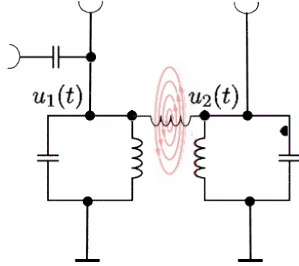
Das bedeutet, dass das Verhältnis 1:1 (ein Hase pro Fuchs) ein 'stabiler Zustand' in der Richtung ist. Wenn dieses Verhältnis herrscht, ändert sich die Richtung des Populationsvektors nicht.

Der Eigenwert $\lambda = 2$: Bedeutet, dass bei diesem 1:1 Verhältnis die Population jedes Jahr um den Faktor 2 (also 100 %) wächst.

2. Aufgabe:

Eigenwerte und gekoppelte LC-Kreise

Zwei identische LC-Schwingkreise sind über eine Spule miteinander gekoppelt.



Die Systemmatrix A , welche die Wechselwirkung der Spannungen beschreibt, sieht wie folgt aus:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(Die Werte sind hier vereinfacht, stehen aber repräsentativ für $\frac{1}{LC}$ -Terme.)

- Bestimmen Sie die Eigenwerte λ .
- Bestimmen Sie die Eigenvektoren.
- Interpretieren Sie, welche zwei unterschiedlichen Frequenzen das System erzeugen kann.

Lösung:

1. Eigenwerte (Frequenzen)

Wir lösen $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -4 \\ -4 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(5 - \lambda)^2 - (-4)^2 = 0$$

$$(5 - \lambda)^2 - 16 = 0$$

Daraus ergeben sich zwei Fälle:

$$5 - \lambda = 4 \implies \lambda_1 = 1 \quad 5 - \lambda = -4 \implies \lambda_2 = 9$$

In Schwingungssystemen gilt oft $\lambda = \omega^2$.

Das bedeutet, wir haben eine langsame Schwingung mit $\omega_1 = 1$ und eine schnelle mit $\omega_2 = 3$.

2. Eigenvektoren (Schwingungsformen)

Für $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 5 - 1 & -4 \\ -4 & 5 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \implies x = y$$

Eigenvektor: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Gleichtakt-Schwingung)

$$\text{Für } \lambda_2 = 9: \begin{pmatrix} 5 - 9 & -4 \\ -4 & 5 - 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \implies x = -y$$

Eigenvektor: $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Gegentakt-Schwingung)

Physikalische Skizze der Schwingung

Stellen Sie sich die beiden Spannungsverläufe $u_1(t)$ und $u_2(t)$ auf einem Oszilloskop vor:

Fall 1:

Die Grundschiwingung (v_1) Beide Kreise schwingen exakt in Phase.

- Sie 'helfen' sich gegenseitig.
- Die effektive Kopplung spielt kaum eine Rolle, die Frequenz ist niedrig ($\lambda = 1$).
- Skizze: Zwei Sinuskurven, die genau übereinander liegen.

Fall 2:

Die Störschiwingung / Gegentakt (v_2)

Beide Kreise schwingen gegenphasig (180° versetzt).

- Immer wenn Kreis 1 positiv ist, ist Kreis 2 negativ.
- Die Energie muss ständig durch das Kopplungselement fließen. - Dies führt zu einer viel höheren Systemspannung/Kraft und damit einer höheren Frequenz ($\lambda = 9$).

Warum ist das wichtig?

In der Hochfrequenztechnik (z.B. WLAN-Antennen oder Filter) möchte man oft eine dieser Moden unterdrücken. Wenn man weiß, dass der 'Gegentakt-Eigenvektor' bei einer störenden Frequenz liegt, kann man das Schaltungsdesign gezielt anpassen.