

1. Aufgabe:

Eigenwerte und Populationswachstum (Fuchs-Hasen-Modell)

Stellen Sie sich vor, Sie beobachten die Entwicklung von Füchsen und Hasen in einem kleinen Waldgebiet über ein Jahr.

- h_n : Anzahl der Hasen zu Beginn des Jahres
- f_n : Anzahl der Füchse zu Beginn des Jahres

Die Population im Folgejahr ($n + 1$) lässt sich durch folgende lineare Transformation beschreiben:

- Die Anzahl der Hasen verdreifacht sich, aber 2 Füchse pro Hase fressen einen Teil:
 $h_{n+1} = 3h_n - 1f_n$
- Die Anzahl der Füchse hängt von den vorhandenen Hasen ab:
 $f_{n+1} = 1h_n + 1f_n$

Das lässt sich als Matrixgleichung schreiben:

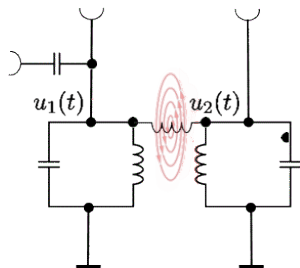
$$\begin{pmatrix} h_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} h_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

Frage: Gibt es ein festes Verhältnis von Hasen zu Füchsen, bei dem sich das Verhältnis von Jahr zu Jahr nicht ändert, sondern die Population nur skaliert (wächst oder schrumpft)?

2. Aufgabe:

Eigenwerte und gekoppelte LC-Kreise

Zwei identische LC-Schwingkreise sind über eine Spule miteinander gekoppelt.



Die Systemmatrix A , welche die Wechselwirkung der Spannungen beschreibt, sieht wie folgt aus:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(Die Werte sind hier vereinfacht, stehen aber repräsentativ für $\frac{1}{LC}$ -Terme.)

- Bestimmen Sie die Eigenwerte λ .
- Bestimmen Sie die Eigenvektoren.
- Interpretieren Sie, welche zwei unterschiedlichen Frequenzen das System erzeugen kann.