Mathematik 1: Zusatzübung - Lineare Gleichungen in der Praxis

Anwendungsbeispiele, die auf große Gleichungssysteme führen:

Zugrunde liegen meist Systeme von partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung der charakterisierender Funktionen, z.B. die Wetterprognose, Parameter sind:

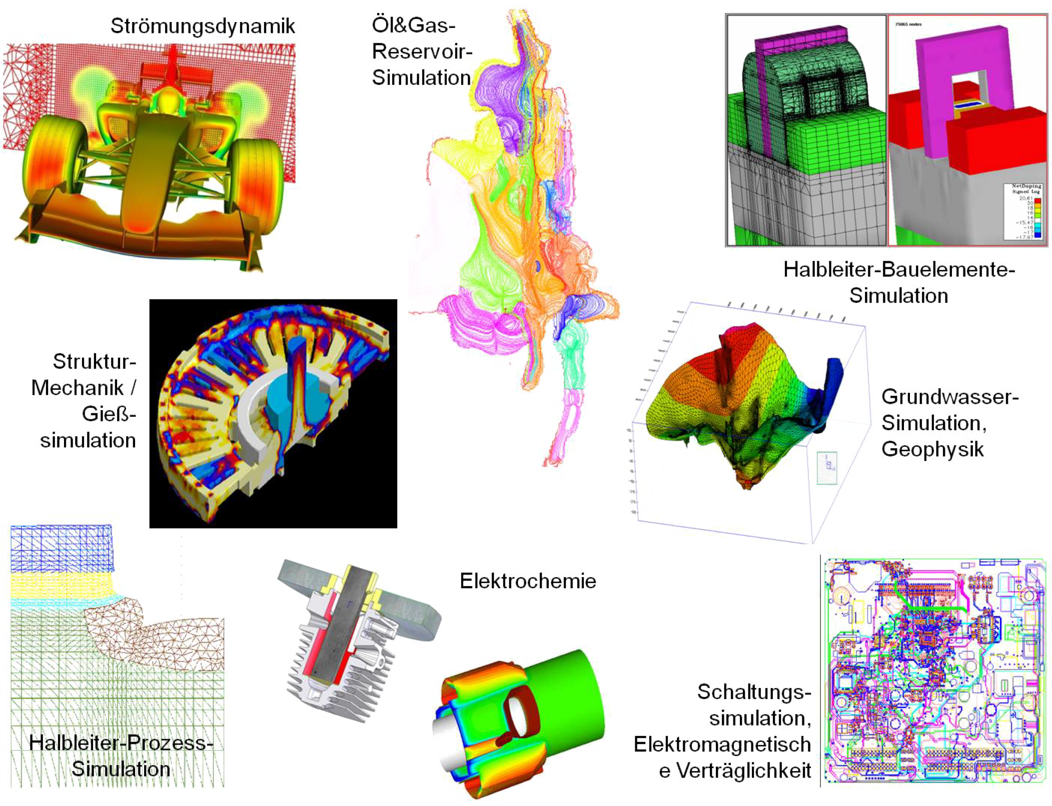
- Windgeschwindigkeit (Vektor aus 3 Komponenten)
- Druck
- Feuchtigkeit
- Temperatur

Für die tägliche Wettervorhersage muss dieses System, in das eine Vielzahl von Messwerten als Startwerte eingehen, mit Hilfe numerischer Verfahren gelöst werden. Hierzu wird ein Gitter durch den Raum, der die Erde umgibt, gelegt. In den Gitterpunkten werden dann Näherungswerte für die Lösungsfunktionen berechnet.

Bei dem heute benutzten Wettermodell besteht das Gitter in vertikaler Richtung aus 40 parallelen Kugelschalen. In jeder dieser Kugelschalen haben die Gitterpunkte Abstände, die in Äquatornähe etwa 30 km betragen. Dies ergibt ungefähr 16 Millionen Gitterpunkte des räumlichen Gitters. Ähnlich wie der Raum durch ein Gitter, wird die Zeit in Zeitschritte unterteilt.

Für eine 10 Tage Prognose braucht man rund 6500 Zeitschritte. In jedem Zeitschritt wird u.a. ein lineares Gleichungssystem mit 16 Millionen Unbekannten (für den Druck in den räumlichen Gitterpunkten) gelöst. Um regelmäßig aktuelle Vorhersagen machen zu können, stehen für die Lösung dieses Problems nur wenige Stunden zur Verfügung. Deshalb müssen extrem schnelle Lösungsverfahren eingesetzt werden.

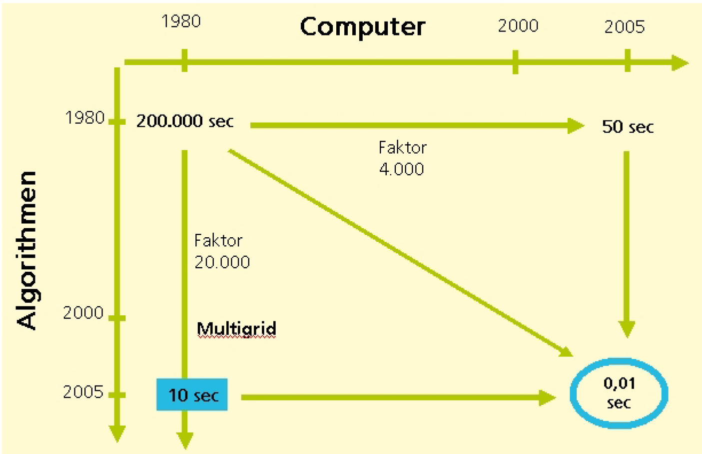
Weitere Anwendungsbeispiele, bei denen große Gleichungssysteme auftreten, die in möglichst kurzer Zeit mit Hilfe effizienter mathematischer Methoden auf Computern gelöst werden, zeigen folgende Abbildungen.



Fortschritte durch Mathematik und Rechnerentwicklung in den letzten 40 Jahren

Folgende Abbildung zeigt anhand eines konkreten Beispiels die Fortschritte bei der Lösung großer Gleichungssysteme, die in 25 Jahren einerseits durch die Angewandte Mathematik in Form immer schnellerer Algorithmen (Rechenverfahren), andererseits durch immer schnellere Rechner erreicht worden sind.

Das zugrundeliegende Beispiel ist ein Gleichungssystem mit weit mehr als einer Million Unbekannten, das bei der numerischen Lösung der Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung auftritt.



1. **Aufgabe:**

   Vergleichen Sie die Beschleunigungsfaktoren auf der Seite der Mathematik und auf der Seite der Rechnerentwicklung.

   Der Beschleunigungsfaktor durch die Mathematik beträgt für dieses Beispiel 20.000, der durch die Computerentwicklung 4.000. Die Beschleunigung durch die Mathematik ist daher für das vorliegende Beispiel um einen Faktor 4 größer.

2. **Aufgabe:**

   Welche Rechenzeit könnte man erwarten, wenn man die Rechenzeit von 1980 durch das Produkt der Beschleunigungsfaktoren durch Algorithmen und Rechnerentwicklung dividiert? Was fällt auf?

   Multipliziert man die beiden Faktoren 4.000 und 20.000, so erhält man das Produkt 80.000.000.
   200.000 sec : 80.000.000 = 0.0025 sec. Man könnte also eine um einen Faktor 4 niedrigere Rechenzeit erwarten, wenn die Beschleunigung von Algorithmen und Rechnerentwicklung unabhängig voneinander wäre.

   Zusatzinfo:

   Tatsächlich ist die Effizienz der modernen Algorithmen auf den alten, langsamen Rechnern höher als auf den schnelleren modernen Computern, d.h. moderne Computer können die schnellen Algorithmen weniger optimal abarbeiten:

   Da diese Algorithmen sehr wenig Rechenoperationen benötigen, ist der Zugriff auf Daten im Speicher auf modernen Rechnern mit ihren leistungsfähigen Prozessoren wesentlich problematischer als auf den alten Rechnern mit wesentlich langsameren Prozessoren.