

# Mathematik 1: Zusatzübung - Lineare Gleichungen in der Praxis

## Anwendungsbeispiele, die auf große Gleichungssysteme führen:

Zugrunde liegen meist Systeme von partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung der charakterisierender Funktionen, z.B. die Wetterprognose, Parameter sind:

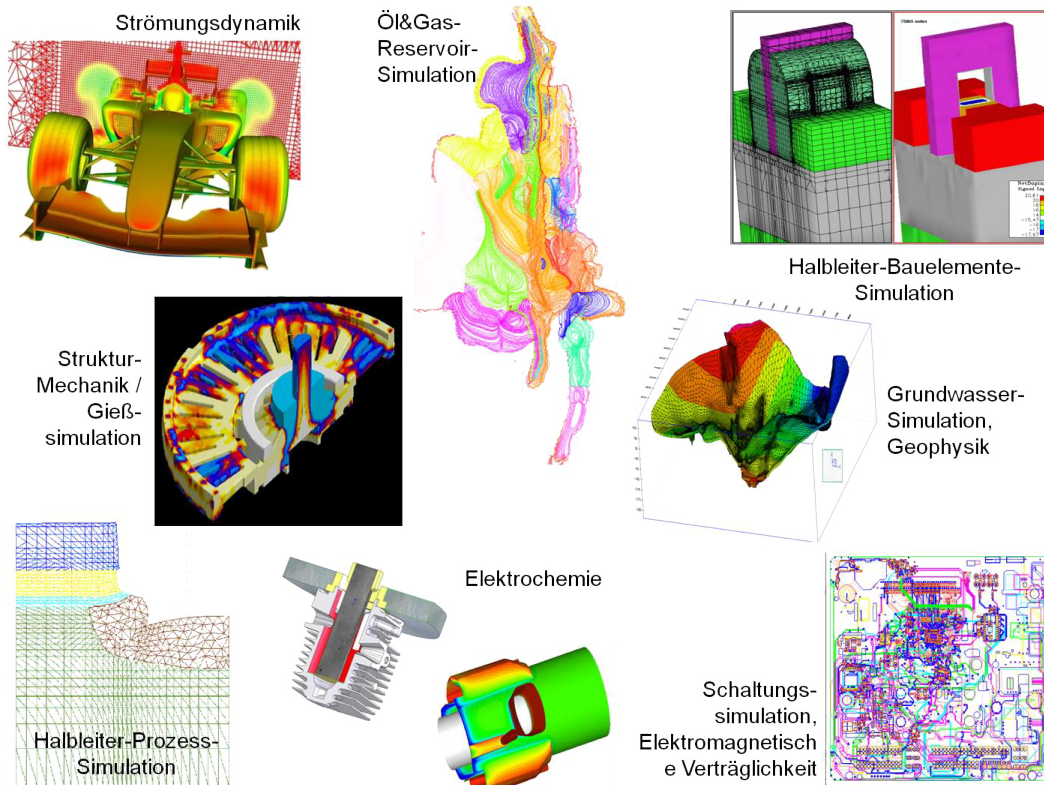
- Windgeschwindigkeit (Vektor aus 3 Komponenten)
- Druck
- Feuchtigkeit
- Temperatur

Für die tägliche Wettervorhersage muss dieses System, in das eine Vielzahl von Messwerten als Startwerte eingehen, mit Hilfe numerischer Verfahren gelöst werden. Hierzu wird ein Gitter durch den Raum, der die Erde umgibt, gelegt. In den Gitterpunkten werden dann Näherungswerte für die Lösungsfunktionen berechnet.

Bei dem heute benutzten Wettermodell besteht das Gitter in vertikaler Richtung aus 40 parallelen Kugelschalen. In jeder dieser Kugelschalen haben die Gitterpunkte Abstände, die in Äquatornähe etwa 30 km betragen. Dies ergibt ungefähr 16 Millionen Gitterpunkte des räumlichen Gitters. Ähnlich wie der Raum durch ein Gitter, wird die Zeit in Zeitschritte unterteilt.

Für eine 10 Tage Prognose braucht man rund 6500 Zeitschritte. In jedem Zeitschritt wird u.a. ein lineares Gleichungssystem mit 16 Millionen Unbekannten (für den Druck in den räumlichen Gitterpunkten) gelöst. Um regelmäßig aktuelle Vorhersagen machen zu können, stehen für die Lösung dieses Problems nur wenige Stunden zur Verfügung. Deshalb müssen extrem schnelle Lösungsverfahren eingesetzt werden.

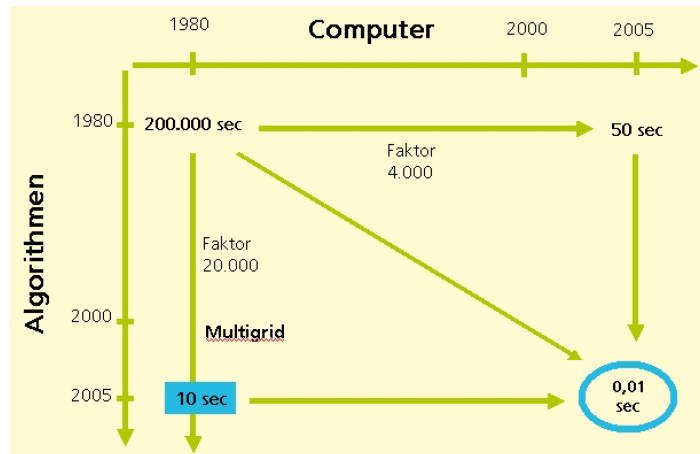
Weitere Anwendungsbeispiele, bei denen große Gleichungssysteme auftreten, die in möglichst kurzer Zeit mit Hilfe effizienter mathematischer Methoden auf Computern gelöst werden, zeigen folgende Abbildungen.



## Fortschritte durch Mathematik und Rechnerentwicklung in den letzten 40 Jahren

Folgende Abbildung zeigt anhand eines konkreten Beispiels die Fortschritte bei der Lösung großer Gleichungssysteme, die in 25 Jahren einerseits durch die Angewandte Mathematik in Form immer schnellerer Algorithmen (Rechenverfahren), andererseits durch immer schnellere Rechner erreicht worden sind.

Das zugrundeliegende Beispiel ist ein Gleichungssystem mit weit mehr als einer Million Unbekannten, das bei der numerischen Lösung der Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung auftritt.



### 1. Aufgabe:

Vergleichen Sie die Beschleunigungsfaktoren auf der Seite der Mathematik und auf der Seite der Rechnerentwicklung.

### 2. Aufgabe:

Welche Rechenzeit könnte man erwarten, wenn man die Rechenzeit von 1980 durch das Produkt der Beschleunigungsfaktoren durch Algorithmen und Rechnerentwicklung dividiert? Was fällt auf?