Mathematik 1: Übungsblatt - Komplexe Zahlen

1. Aufgabe:

Berechnen Sie das Produkt von z_1 und z_2.

a) $z_1 = 2 + 3i$ $\quad z_2 = 4 + 5i$ $\quad$ **Lösung:** $z_1 \cdot z_2 = -7 + 22i$

b) $z_1 = 0.5 + 3i$ $\quad z_2 = 8 - 10i$ $\quad$ **Lösung:** $z_1 \cdot z_2 = 34 + 19i$

c) $z_1 = i$ $\quad z_2 = -2 - 3i$ $\quad$ **Lösung:** $z_1 \cdot z_2 = 3 - 2i$

2. Aufgabe:

Berechnen Sie die Quotienten z_1/z_2 und z_2/z_1.

a) $z_1 = 4 + 4i$ $\quad z_2 = 12 + 12i$ $\quad$ **Lösung:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}$; $\quad \frac{z_2}{z_1} = 3$

b) $z_1 = -3 + 4i$ $\quad z_2 = 5 + 7i$ $\quad$ **Lösung:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{13}{74} + \frac{41}{74}i$; $\quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{13}{25} - \frac{41}{25}i$

c) $z_1 = 10i$ $\quad z_2 = 10 + 5i$ $\quad$ **Lösung:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$; $\quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{2} - i$

3. Aufgabe:

Bringen Sie folgende komplexe Zahlen in die Koordinatenform $z = a + ib$.

a) $z_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

b) $z_2 = z + \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus 0$

c) $z_3 = \bar{z}^2 + \frac{1}{z^2}$

d) $z_4 = \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2} = \frac{(1+2i)(1+2i) - (1-i)(1-i)(1-i)}{(3+2i)(3+2i)(3+2i) - (2+i)(2+i)} = \dots$

Lösung:

a) z_1 ist bereits in Form. $\quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $z_2 = a + ib + \frac{1}{a+ib} = a + ib + \frac{a \overset{-}{\cancel{+}} ib}{a^2+b^2} = a + \frac{a}{a^2+b^2} + i\left(b \overset{-}{\cancel{+}} \frac{b}{a^2+b^2}\right)$

c) $z_3 = \bar{z}^2 + \frac{\bar{z}^2}{z^2 \cdot \bar{z}^2} = \bar{z}^2 + \frac{\bar{z}^2}{|z|^4} = \bar{z}^2\left(1 + \frac{1}{|z|^4}\right) = (a^2 - b^2)\left(1 + \frac{1}{|z|^4}\right) - i2ab\left(\overset{1+}{}\frac{1}{|z|^4}\right)$

d) $z_4 = \frac{-1+6i}{-12+42i} = \frac{1}{6} \cdot \frac{-1+6i}{-2+7i} = \frac{1}{6} \cdot \frac{44-5i}{2^2+7^2} = \frac{22}{159} - i\frac{5}{318}$

4. Aufgabe:

Bringen Sie folgende komplexe Zahlen in die Exponentialform $\boxed{z = |z|e^{i\varphi}}$ $\boxed{= |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)}$

a) $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ $= \underbrace{\frac{1}{2}} + i \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

b) $z_2 = \frac{1-i}{1+i}$

Lösung:

a) $|z_1| = \sqrt{\frac{1^2+(\sqrt{3})^2}{4}} = 1 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\qquad$ da $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ und $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

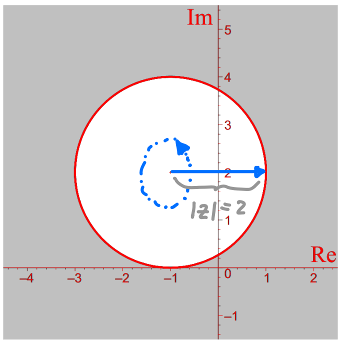
b) $|z_2| = \sqrt{\frac{1^2+1^2}{\sqrt{1^2+1^2}}} = 1 \quad \Rightarrow \quad z_2 = -i = 1 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi}$ $\qquad$ da $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$

5. Aufgabe:

Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge $\{z \in C : |z+1-2i| \geq 2\}$.

Lösung:

$|z+1-2\mathrm{i}| = |z-(-1+2\mathrm{i})| \geq 2$: Abstand zwischen z und $-1+2\mathrm{i}$ ist ≥ 2.

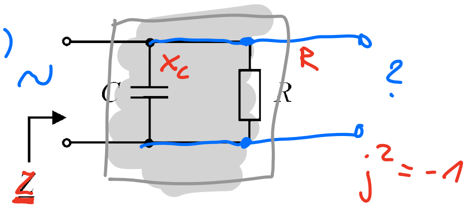


6. Aufgabe:

Geben Sie den komplexen Widerstand $\underline{Z}$ der RC-Parallelschaltung allgemein in Abhängigkeit von ω, R und $C(\underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C})$ in der algebraischen Form $Z = a + jb$ an. Bestimmen Sie also die Ausdrücke für a und b.

$X_L = j\omega L$

$X_C = \frac{1}{j\omega C}$



Lösung:

$$\underline{Z} = \frac{R \cdot \underline{X}_C}{R + \underline{X}_C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R \cdot (1 - j\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$\underline{Z} = \underbrace{\frac{R}{1+\omega^2R^2C^2}}_{a} - j \cdot \underbrace{\frac{\omega R^2 C}{1+\omega^2R^2C^2}}_{b}$$

$\omega_0 = 0 \rightarrow \underline{Z} = R$