Mathematik 1: Übungsblatt Funktionen 4

1. Aufgabe:

Im folgenden Zeigerdiagramm ist der Funktionsgraph einer allgemeinen Sinusfunktion $f(t) = A \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi)$ dargestellt.

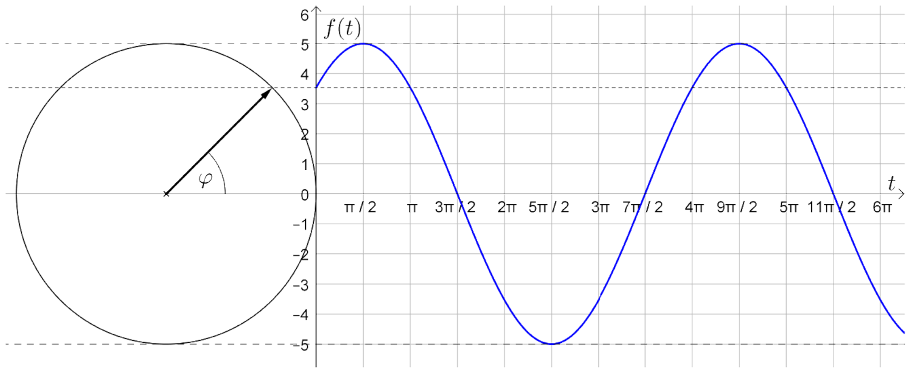
a) Zeichnen Sie die Startposition des Zeigers ein.

b) Bestimmen Sie die Amplitude A, die Kreisfrequenz ω und den Nullphasenwinkel φ.

c) Geben Sie eine Funktionsgleichung der dargestellten, allgemeinen Sinusfunktion an.

Lösung:

a)



b) $A = 5$, $\omega = 0.5$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. φ kann auch ein Vielfaches von $2 \cdot \pi$ sein, z.B. $\varphi = -\frac{7\pi}{4}$

c) $f(t) = 5{\cdot}\sin\left(0.5 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$

2. Aufgabe:

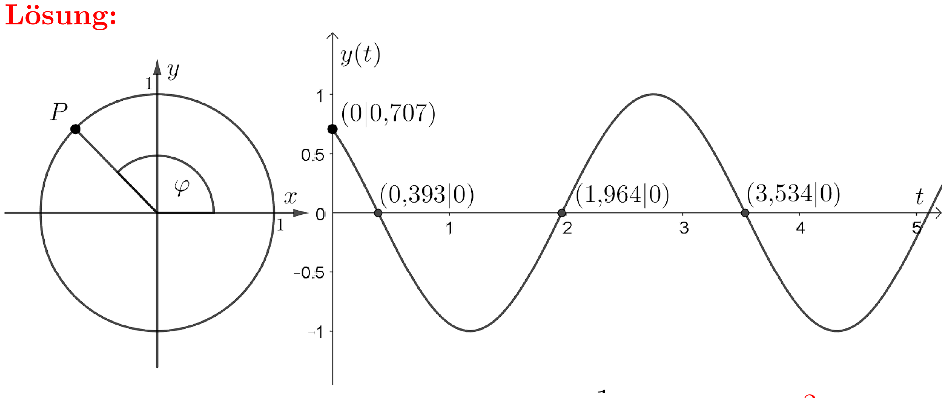
Zeichnen Sie in der nachfolgenden Abbildung für $t = 0$ den Punkt P und die Phasenverschiebung φ ein:

a) Zeichnen Sie die Startposition des Zeigers ein.

b) Bestimmen Sie die Amplitude A, die Kreisfrequenz ω und den Nullphasenwinkel φ.

c) Geben Sie eine Funktionsgleichung der dargestellten, allgemeinen Sinusfunktion an.

Lösung:



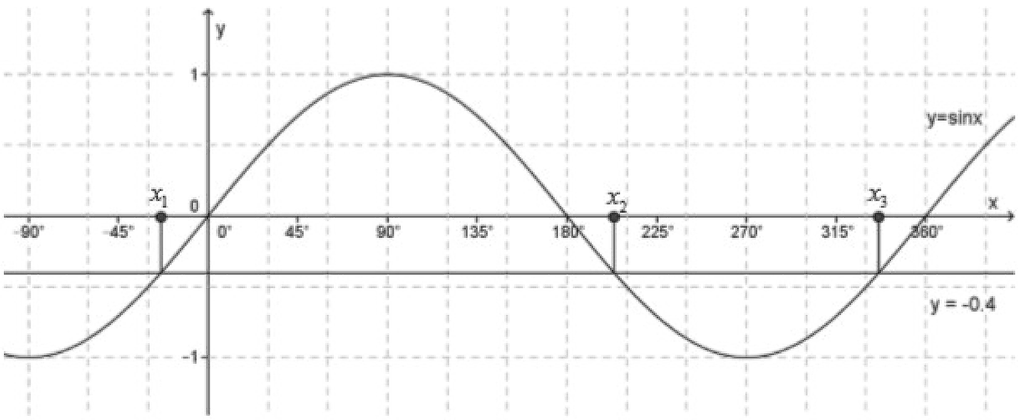
$A = 1 \quad T = 3.141 \approx \pi \quad f \approx \frac{1}{\pi} \quad \omega \approx 2 \quad \varphi = -\omega \cdot t_0 = -\frac{2\pi}{3.141} \cdot (1.964 - 3.141) = 2.3544 \approx \frac{3}{4}\pi$

3. Aufgabe:

Bestimmen Sie alle Winkel x zwischen $0°$ und $360°$, für die gilt: $\mathbf{sin(x) = -0.4}$ und zeichnen Sie die Funktion und Punkte in ein Diagramm ein:

Lösung:

Graphisch entspricht dies den Schnittpunkten der Graphen $y = \sin(x)$ und $y = -0.4$:



$x_1 = \arcsin(-0.4) \approx -23.58°$ (dieser Winkel liegt nicht im angegebenen Bereich)

$x_2 = 180° - x_1 \approx 203.58°$ $\sin(x) = \sin(180° - x)$

$x_3 = x_1 + 360° \approx 336.42°$ Periode beim Sinus

4. Aufgabe:

Berechnen Sie: $\sin(x)\cdot\cos(20°)+\cos(x)\cdot\sin(20°) = 0$

für das Intervall $[-90°, 90°]$

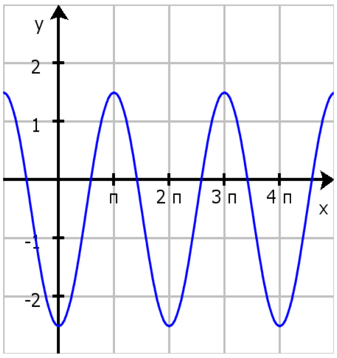
Lösung:

Mit Additionstheorem: $\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \sin(\alpha + \beta)$

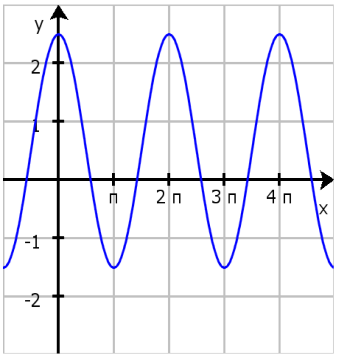
$\Rightarrow \sin(x)\cdot\cos(20°)+\cos(x)\cdot\sin(20°) = \sin(x + 20°)$
$\Rightarrow \sin(x + 20°) = 0$
$\Rightarrow \sin(x + 20°) = 0 \quad | \cdot\sin^{-1}$
$\Rightarrow x + 20° = \sin^{-1}(0)$
$\Rightarrow x + 20° = 0° \quad | - 20°$
$\Rightarrow x = -20°$

5. Aufgabe:

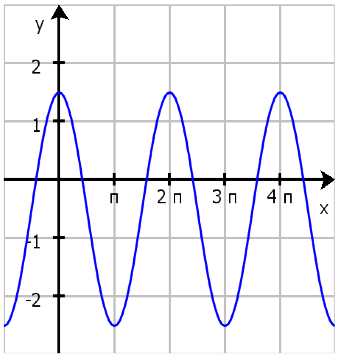
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\cos(x) - \frac{1}{2} \quad x \in \mathbb{R}$ und folgende Schaubilder:



A



B



C

Begründen Sie welche Bilder nicht Schaubild von f sein können. (Nennen Sie z.B. eine Eigenschaft, die nicht mit den Funktionseigenschaften von f vereinbar ist)

Lösung:

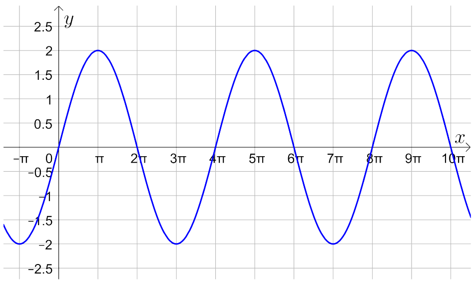
A kann nicht das Schaubild von f sein, da durch das positive Vorzeichen die Kurve rechts von der y-Achse eine fallen muss.

B kann nicht das Schaubild von f sein, da die Kurve in B um eine halbe Einheit nach oben verschoben ist. Das Schaubild von f ist jedoch nach unten verschoben.

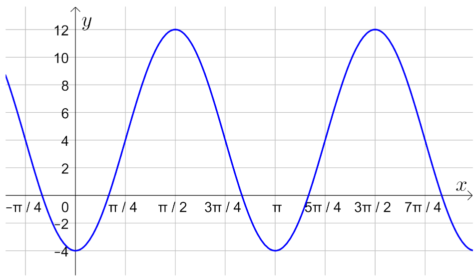
6. Aufgabe:

Ermitteln Sie die Parameter A, ω, φ und c der dargestellten allgemeinen Sinusfunktionen $f(t) = A{\cdot}\sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$ dargestellt.

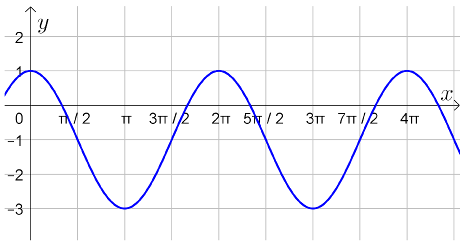
a)



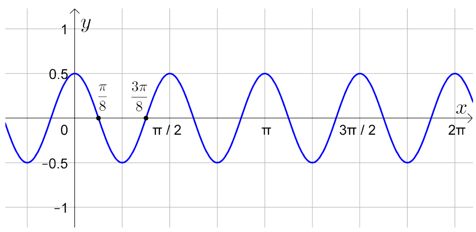
b)



c)



d)



Lösung:

a) $y = 2{\cdot}\sin(0.5x)$

b) $y = 8{\cdot}\sin(2x - \frac{\pi}{2})$

c) $y = 2{\cdot}\sin(x - \frac{3\pi}{2}) - 1$

d) $y = 0.5{\cdot}\sin(4x - \frac{3\pi}{2})$

7. Aufgabe:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2{\cdot}\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Geben Sie die Amplitude, Periode und Phase sowie die Nullstellen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

Lösung:

Amplitude: $A = 2$ Periodenlänge: $p = \frac{2\pi}{3}$ Phase: $\varphi = \frac{\pi}{6}$

Nullstellen: $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow\ x_0(k) = 3x - \frac{\pi}{2} = k \cdot \pi$ nach x auflösen...

$x \to \frac{\pi}{6} + \frac{\pi \cdot k}{3}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow\ L = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

8. Aufgabe:

Für welche x mit $0 \le x \le 2\pi$ ist die folgende Gleichungen erfüllt?

$\cos^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x) = \frac{1}{2}$

Lösung:

Substitution: $\cos(x) = z \ \Leftrightarrow\ z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow\ z_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}\ \Rightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2}$ oder $\cos(x) = 1$

$L = \left\{0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; 2\pi\right\}$

9. Aufgabe:

Berechnen Sie aus den harmonischen Schwingungen

$y_1 = 3\cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$ und $y_2 = -3\sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$

die resultierende Schwingung mit der Amplitude und Winkel.

Lösung:

$$y_1 = 3\cos(\omega t - \tfrac{\pi}{4}) = 3\sin(\omega t + \tfrac{\pi}{4})$$
$$y_2 = -3\cos(\omega t - \tfrac{\pi}{6}) = 3\sin(\omega t + \tfrac{5\pi}{6})$$

$y = A{\cdot}\sin(\omega t + \varphi)$ und $A_1 = A_2 = 3,\ \varphi_1 = \frac{\pi}{4},\ \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$ mit

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \sqrt{9 + 9 + 9\cos\left((\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6})\pi\right)}$$
$$= \sqrt{18 + 9\cos\left((\tfrac{3}{12} - \tfrac{2}{12})\pi\right)} \approx \sqrt{18 + 9 \cdot 0.991} \approx \sqrt{26.9} \approx 5.188$$

$$\tan\varphi = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \frac{\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{6}} \approx -7.595$$

$\Rightarrow\ \varphi \approx \arctan{-7.595} \approx -1.44 \approx 82°$