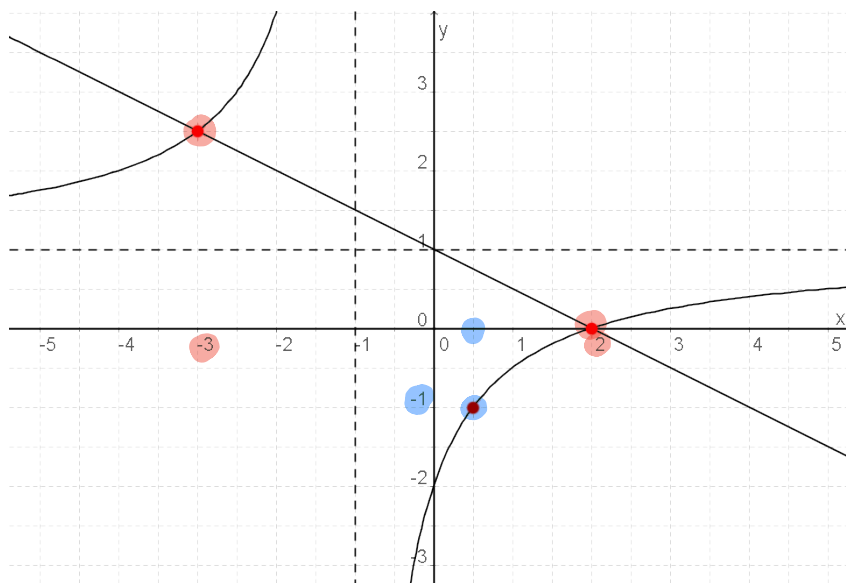


Mathematik 1: Übungsblatt Funktionen 3

1. Aufgabe:

Gegeben ist der Graph einer linearen und einer gebrochenrationalen Funktion. Die Zeichnung zeigt die Graphen der Funktionen mit den Funktionsgleichungen:

$$y = \frac{x-2}{1+x} \text{ und } y = -\frac{1}{2}x + 1.$$



- Bestimme anhand der Zeichnung die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{x-2}{1+x} = -\frac{1}{2}x + 1$.
- Bestimme mit Hilfe des gegebenen Funktionsgraphen die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{x-2}{1+x} = -1$.

Lösung:

- Die Lösungsmenge der Gleichung repräsentiert die **x-Werte**, bei denen sich die Funktionen schneiden.
 $L = \{-3; 2\}$
- An der Stelle, an der die gebrochenrationale Funktion den **y-Wert -1** hat, ist der x-Wert 0.5 \Rightarrow **$x = 0.5$**

2. Aufgabe:

Zeichnen Sie mit Hilfe einer Wertetabelle die Graphen zu folgender Funktionsgleichung und bestimmen Sie die waagrechte und senkrechte Asymptote rechnerisch.

$$y = \frac{2x}{x+3} \quad \leftarrow \text{0?}$$

Lösung:

- **Senkrechte Asymptote:**

Nenner gleich 0 setzen um die Definitionslücke herauszufinden.

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3.$$

Die Funktion hat eine senkrechte Asymptote bei $x = -3$.

- **Waagrechte Asymptote:**

Betrachten der Funktions-Grenzwerte gegen $+\infty$ und $-\infty$.

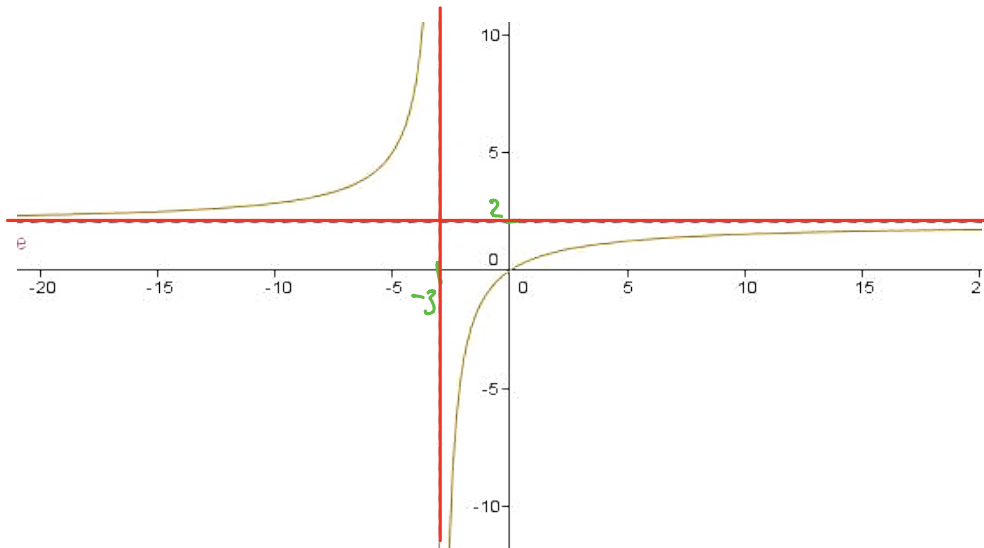
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{3}{x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + \frac{3}{x}} = 2$$

Die Funktion hat also eine waagrechte Asymptote bei $y = 2$.

- **Wertetabelle:**

x	-4	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	8	-4	-1	0	0.5	$\frac{4}{5}$	1



3. Aufgabe:

Geben Sie den maximal möglichen **Definitionsbereich** an und untersuchen Sie das **Verhalten** des Graphen an den **Definitionslücken** sowie für $x \rightarrow \pm\infty$. **Skizzieren Sie den Graphen.**

$$y = \frac{2 - x^1}{0.2x^2 - 1} \rightarrow 0?$$

Lösung:

- Definitionsbereich:

Nenner gleich 0 setzen um die Definitionslücken herauszufinden.

$$0.2x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 5 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{5} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\} \quad \text{pq-Formel}$$

- Verhalten der Funktion an den Definitionslücken:

hier muss Vorzeichen!

$\lim_{x \downarrow \sqrt{5}} \frac{2 - \sqrt{5}}{0^+} = -\infty$	$\lim_{x \uparrow \sqrt{5}} \frac{2 - \sqrt{5}}{0^-} = \infty$
$\lim_{x \downarrow -\sqrt{5}} \frac{2 + \sqrt{5}}{0^-} = -\infty$	$\lim_{x \uparrow -\sqrt{5}} \frac{2 + \sqrt{5}}{0^+} = \infty$

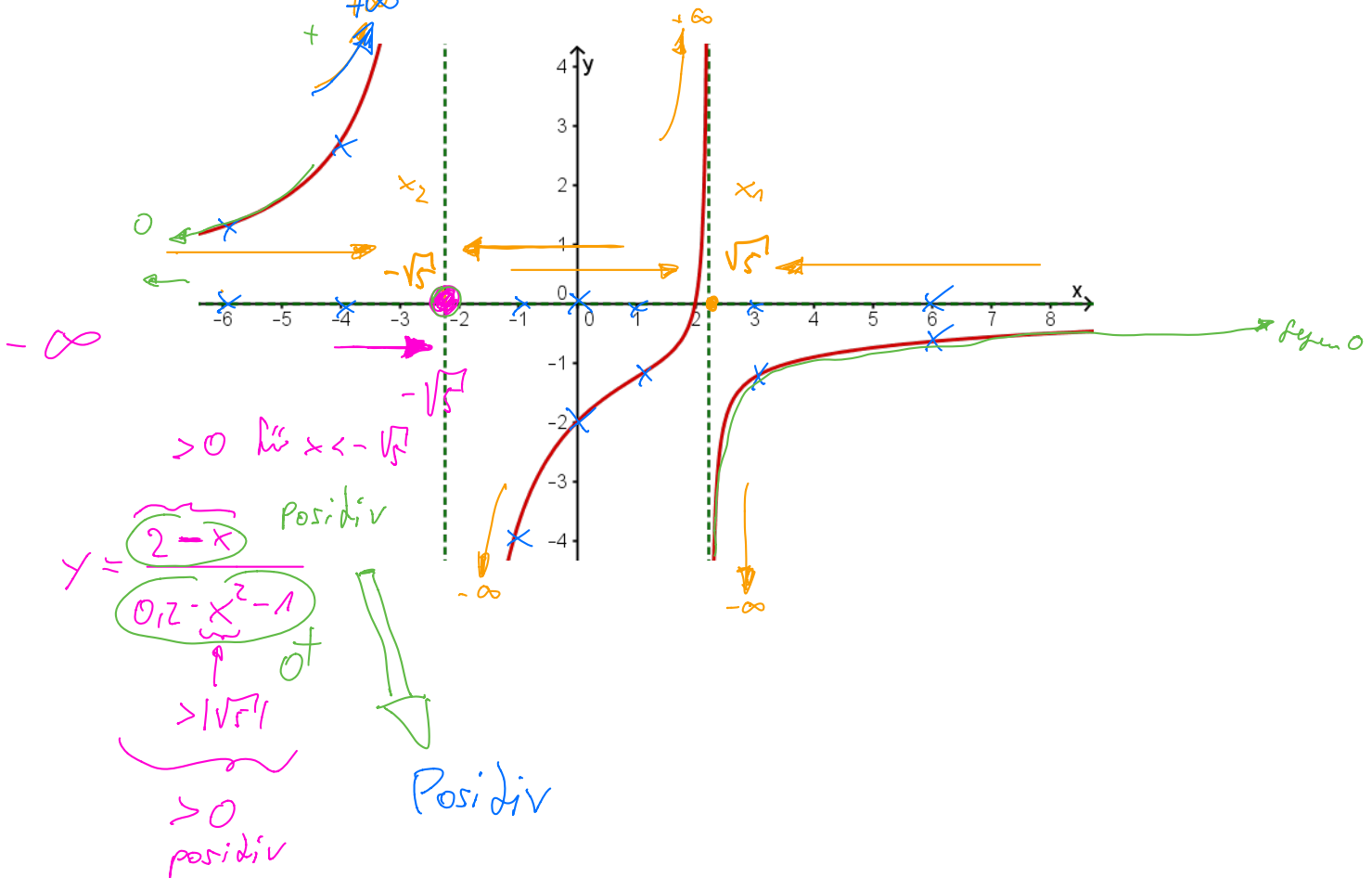
- Verhalten der Funktion im Unendlichen:

Betrachten der Funktions-Grenzwerte gegen $+\infty$ und $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{0.4x} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{0.4x} = 0^+$$

l'Hospital: $\frac{f'}{g'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{+2 \cdot 0.2x} = 0^-$



4. Aufgabe:

Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich an und untersuchen Sie das Verhalten des Graphen an den Definitionslücken sowie für $x \rightarrow \pm\infty$. Skizzieren Sie den Graphen.

$$y = \frac{0.5x^2 - 2}{1 - x}$$

Lösung: $x = 1 \Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$

- Definitionsbereich:

Nenner gleich 0 setzen um die Definitionslücken herauszufinden.

$$1 - x = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

- Verhalten der Funktion an der Definitionslücke:

(nur)
Vorzeichen!

$$\lim_{x \downarrow 1} \frac{-1.5}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{-1.5}{0^+} = -\infty$$

- Verhalten der Funktion im Unendlichen:

$$x \rightarrow \pm\infty$$

Da der Zählergrad der Funktion größer ist als der Nennergrad, gibt es eine schräge Asymptote.

Bestimmen dieser Asymptote durch Polynomdivision.

$$f(x) = \frac{0.5x^2 - 2}{1 - x} = -0.5x - 0.5$$

Schräge Asymptote beschreibt das Verhalten der Funktion im Unendlichen.

$$\Rightarrow \text{Asymptote: } y = -0.5x - 0.5$$

