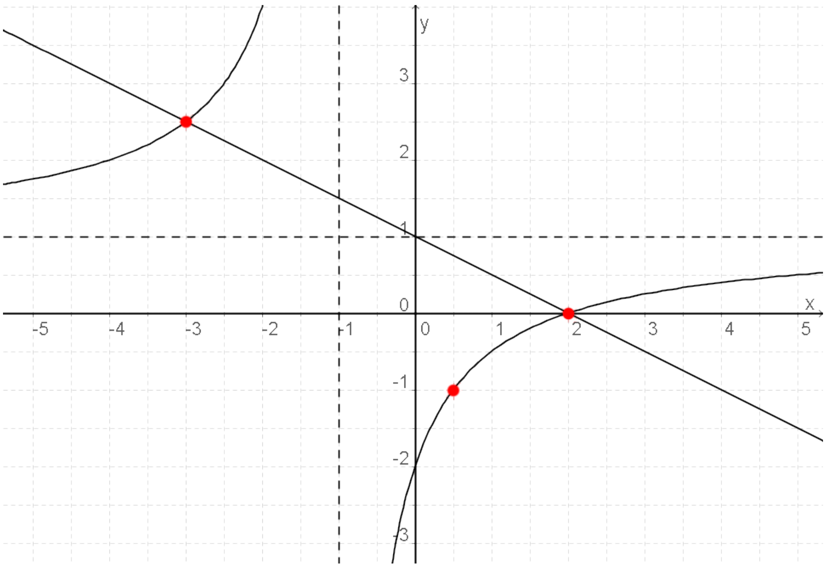
Mathematik 1: Übungsblatt Funktionen 3

1. Aufgabe:

Gegeben ist der Graph einer linearen und einer gebrochenrationalen Funktion. Die Zeichnung zeigt die Graphen der Funktionen mit den Funktionsgleichungen:
$y = \dfrac{x-2}{1+x}$ und $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$.



a) Bestimme anhand der Zeichnung die Lösungsmenge der Gleichung $\dfrac{x-2}{1+x} = -\dfrac{1}{2}x + 1$.

b) Bestimme mit Hilfe des gegebenen Funktionsgraphen die Lösungsmenge der Gleichung $\dfrac{x-2}{1+x} = -1$.

Lösung:

a) Die Lösungsmenge der Gleichung repräsentiert die ***x*-Werte**, bei denen sich die Funktionen schneiden.
$\boldsymbol{L = \{-3; 2\}}$

b) An der Stelle, an der die gebrochenrationale Funktion den y-Wert -1 hat, ist der x-Wert 0.5 $\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x = 0.5}$

2. Aufgabe:

Zeichnen Sie mit Hilfe einer Wertetabelle die Graphen zu folgender Funktionsgleichung und bestimmen Sie die waagrechte und senkrechte Asymptote rechnerisch.

$$y = \frac{2x}{x+3}$$

Lösung:

- **Senkrechte Asymptote:**
  Nenner gleich 0 setzen um die Definitionslücke herauszufinden.
  $x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = -3}$.
  Die Funktion hat eine senkrechte Asymptote bei $x = -3$.

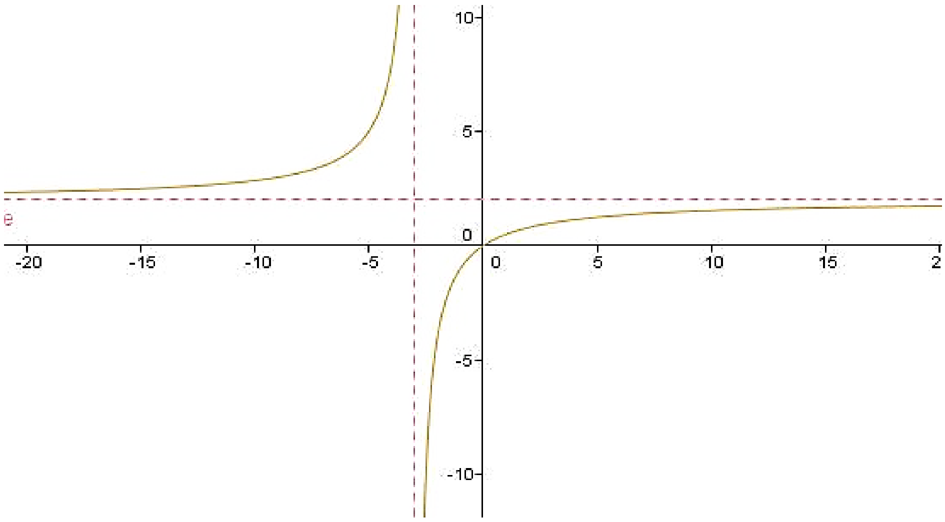
- **Waagrechte Asymptote:**
  Betrachten der Funktions-Grenzwerte gegen $+\infty$ und $-\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{3}{x}} = 2$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1+\frac{3}{x}} = 2$$

  Die Funktion hat also eine waagrechte Asymptote bei $\boldsymbol{y = 2}$.

- **Wertetabelle:**

x	-4	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	8	-4	-1	0	0.5	$\frac{4}{5}$	1



3. Aufgabe:

Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich an und untersuchen Sie das Verhalten des Graphen an den Definitionslücken sowie für $x \to \pm\infty$. Skizzieren Sie den Graphen.

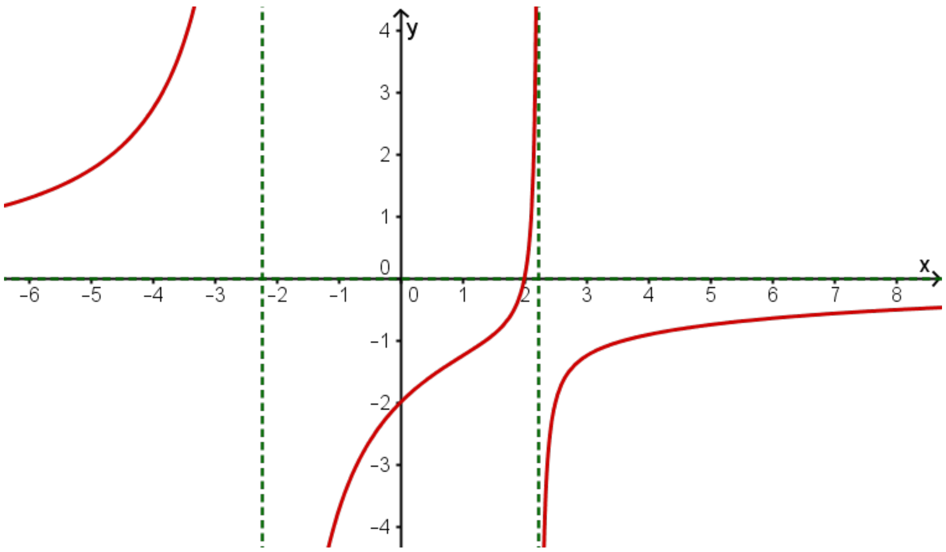
$$y = \frac{2-x}{0.2x^2-1}$$

Lösung:

- **Definitionsbereich:**
  Nenner gleich 0 setzen um die Definitionslücken herauszufinden.
  $0.2x^2 - 1 = 0$
  $x^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D_f = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}}.$

- **Verhalten der Funktion an den Definitionslücken:**
  $$\lim_{x\downarrow\sqrt{5}} \frac{2-\sqrt{5}}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x\uparrow\sqrt{5}} \frac{2-\sqrt{5}}{0^-} = \infty$$
  $$\lim_{x\downarrow-\sqrt{5}} \frac{2+\sqrt{5}}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\uparrow-\sqrt{5}} \frac{2+\sqrt{5}}{0^+} = \infty$$

- **Verhalten der Funktion im Unentlichen:**
  Betrachten der Funktions-Grenzwerte gegen $+\infty$ und $-\infty$.
  $$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{0.4x} = 0^-$$
  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{0.4x} = 0^+$$



4. Aufgabe:

Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich an und untersuchen Sie das Verhalten des Graphen an den Definitionslücken sowie für $x \to \pm\infty$. Skizzieren Sie den Graphen.

$$y = \frac{0.5x^2 - 2}{1 - x}$$

Lösung:

- **Definitionsbereich:**
  Nenner gleich 0 setzen um die Definitionslücken herauszufinden.
  $1 - x = 0$
  $x = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}}.$

- **Verhalten der Funktion an der Definitionslücke:**

  $$\lim_{x \downarrow 1} \frac{-1.5}{0^-} = \infty$$
  $$\lim_{x \uparrow 1} \frac{-1.5}{0^+} = -\infty$$

- **Verhalten der Funktion im Unentlichen:**
  Da der Zählergrad der Funktion größer ist als der Nennergrad, gibt es eine schräge Asymptote.
  Bestimmen dieser Asymptote durch Polynomdivision.
  $$f(x) = \frac{0.5x^2 - 2}{1 - x} = -0.5x - 0.5$$
  Schräge Asymptote beschreibt das Verhalten der Funktion im Unendlichen.
  $\Rightarrow$ Asymptote: $\boldsymbol{y = -0.5x - 0.5}$