Mathematik 1: Übungsblatt Funktionen 2

1. Aufgabe:

Wie muss $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die folgenden Funktionen an den Stellen $x = 3$ bei a) bzw. $x = -3$ bei b) stetig werden?

$x^2 - 4 = -\frac{1}{x} + a$

$3^2 - 4 = -\frac{1}{3} + a$

a) $f(x) = \begin{cases} \boxed{x^2 - 4} & \text{für } x \leq 3 \\ \boxed{-\dfrac{1}{x} + a} & \text{für } x > 3 \end{cases}$

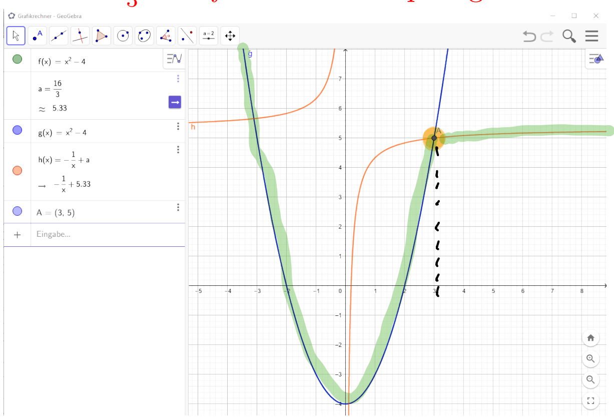
b) $f(x) = \begin{cases} 2ax - x^3 & \text{für } x > -3 \\ -4x^2 + 21x & \text{für } x \leq -3 \end{cases}$

Lösung:

a) Die beiden Teilfunktionen $x^2 - 4$ und $-\frac{1}{x} + a$ können an der Stelle $x = 3$ verglichen werden, da beide dort stetig sind. Wir setzen also $x = 3$ ein und erhalten die Gleichung

$$3^2 - 4 = -\frac{1}{3} + a \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a = \frac{16}{3}}}.$$

Für $a = \frac{16}{3}$ hat f nun keinen Sprung an der Stelle $x = 3$ und ist dort stetig.



b) Wie in (a) vergleichen wir beide Teilfunktionen und erhalten die Gleichung

$$2a(-3) - (-3)^3 = -4(-3)^2 + 21(-3) \quad \Rightarrow \quad -6a + 27 = -36 - 63 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = 21}.$$

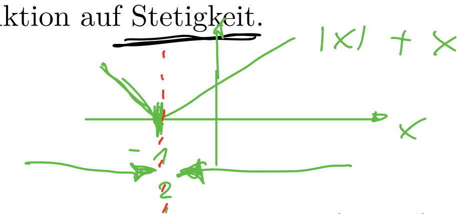
2. Aufgabe:

Überprüfen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit.

$$f(x) = x + \frac{x+1}{|x+1|}$$

0 ?

-1

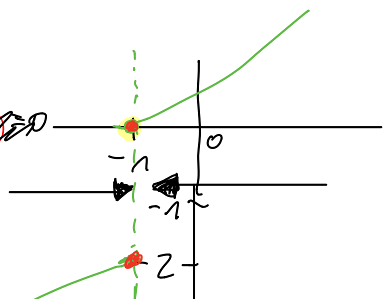


Lösung:

Für $x > -1$ ist der Zähler $x + 1$ immer positiv, also $|x + 1| = x + 1$ und daher $f(x) = x + 1$ eine stetige Funktion auf $(-1, \infty)$.
Für $x < -1$ gilt $|x + 1| = -(x + 1)$. Somit ist $f(x) = x - 1$ und stetig auf $(-\infty, -1)$.

An der Stelle $x = -1$ ergibt sich aber folgende Situation:

$$\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \lim_{x \uparrow -1} \boxed{x - 1} = -2 \neq 0 = \lim_{x \downarrow -1} \boxed{x + 1} = \lim_{x \downarrow -1} f(x) = 0$$



Somit kann f in $x = -1$ nicht stetig sein.

3. Aufgabe:

Überprüfen Sie jeweils, ob und wie die Funktion f in $\boxed{x_0 = -1}$ stetig fortsetzbar ist.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 2} \to 0 \quad 2 \quad x = -1 \qquad (-1)^2 - 3 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \qquad \dfrac{(-1)}{(-1)} \qquad x^3 - x^2 - x + 1 : x + 1 = x^2 - 2x + 1$

c) $f(x) = \dfrac{4x \to 0}{x^2 + 2x + 1 \; (-1)} \qquad \dfrac{\neq 0}{-1}$

Lösung:

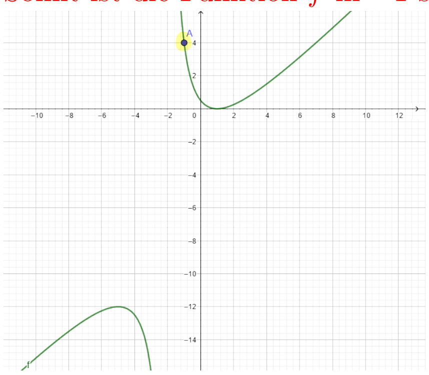
a) Man bestimme die Nullstellen und forme (evtl. durch Polynomdivision) um dass gilt:

$x = -1 \to$ Definitionslücke

$$f(x) = \frac{(\cancel{x+1})(x^2 - 2x + 1)}{(\cancel{x+1})(x+2)} = \boxed{\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}} \to \text{Polstelle: } x = -2$$

aber stetig fortsetzbar

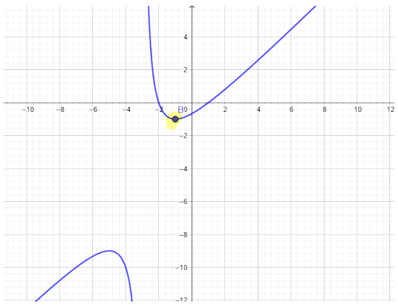
Somit ist die Funktion f in -1 stetig fortsetzbar durch $f(-1) = 4$.



$x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$

b) $f(x) = \dfrac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{(\cancel{x+1})(x^2 + x - 6)} = \dfrac{(x - 1)(x^2 - 4)}{(x^2 + x - 6)}$

Die Funktion f ist also in -1 stetig fortsetzbar durch $f(-1) = -1$.



c) Die Funktion f ist in -1 nicht stetig fortsetzbar, da $\lim\limits_{x \to -1} |f(x)| = \infty$ ist.