

Mathematik 1: Übungsblatt Funktionen 2

1. Aufgabe:

Wie muss $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die folgenden Funktionen an den Stellen $x = 3$ bei a) bzw. $x = -3$ bei b) stetig werden?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{für } x \leq 3 \\ -\frac{1}{x} + a & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

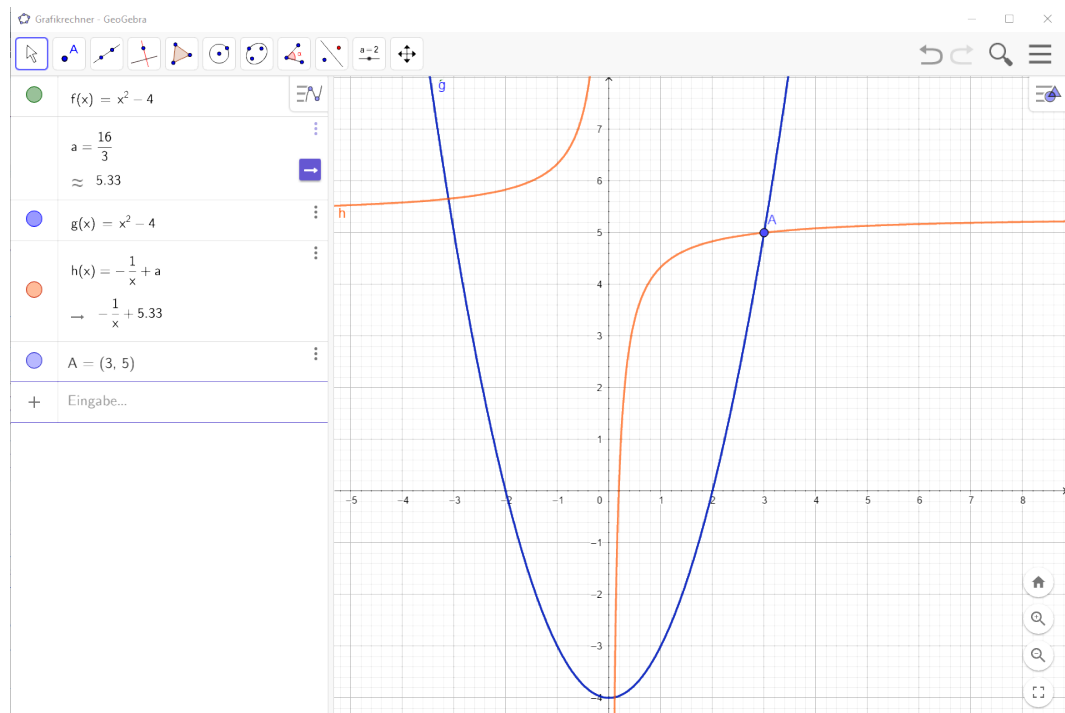
$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 2ax - x^3 & \text{für } x > -3 \\ -4x^2 + 21x & \text{für } x \leq -3 \end{cases}$$

Lösung:

a) Die beiden Teilfunktionen $x^2 - 4$ und $-\frac{1}{x} + a$ können an der Stelle $x = 3$ verglichen werden, da beide dort stetig sind. Wir setzen also $x = 3$ ein und erhalten die Gleichung

$$3^2 - 4 = -\frac{1}{3} + a \Rightarrow a = \frac{16}{3}.$$

Für $a = \frac{16}{3}$ hat f nun keinen Sprung an der Stelle $x = 3$ und ist dort stetig.



b) Wie in (a) vergleichen wir beide Teilfunktionen und erhalten die Gleichung

$$2a(-3) - (-3)^3 = -4(-3)^2 + 21(-3) \Rightarrow -6a + 27 = -36 - 63 \Rightarrow a = 21.$$

2. Aufgabe:

Überprüfen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit.

$$f(x) = x + \frac{x+1}{|x+1|}$$

Lösung:

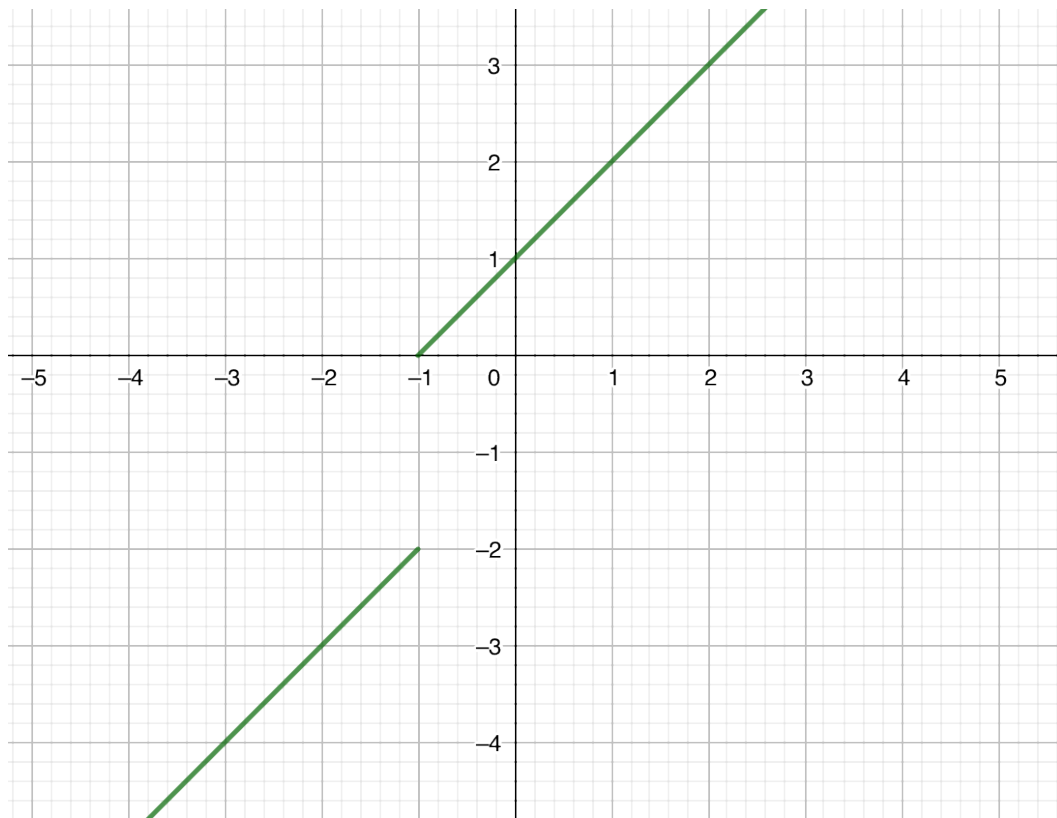
Für $x > -1$ ist der Zähler $x+1$ immer positiv, also $|x+1| = x+1$ und daher $f(x) = x+1$ eine stetige Funktion auf $(-1, \infty)$.

Für $x < -1$ gilt $|x+1| = -(x+1)$. Somit ist $f(x) = x-1$ und stetig auf $(-\infty, -1)$.

An der Stelle $x = -1$ ergibt sich aber folgende Situation:

$$\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \lim_{x \uparrow -1} x - 1 = -2 \neq 0 = \lim_{x \downarrow -1} x + 1$$

Somit kann f in $x = -1$ nicht stetig sein.



3. Aufgabe:

Überprüfen Sie jeweils, ob und wie die Funktion f in $x_0 = -1$ stetig fortsetzbar ist.

a) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 2}$

b) $f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$

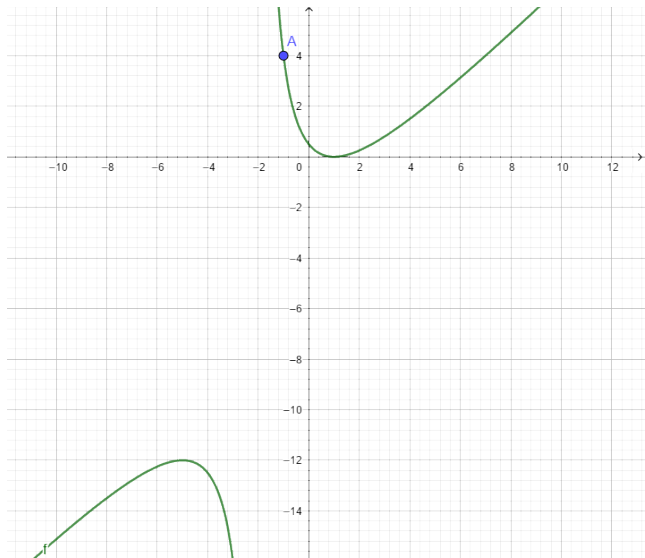
c) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 2x + 1}$

Lösung:

a) Man bestimme die Nullstellen und forme (evtl. durch Polynomdivision) um dass gilt:

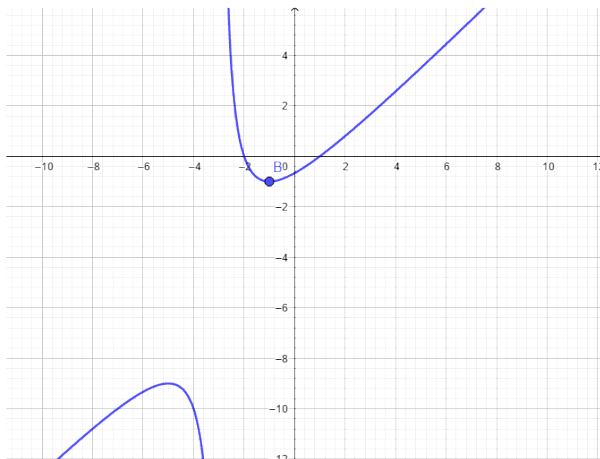
$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2 - 2x + 1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+2}$$

Somit ist die Funktion f in -1 stetig fortsetzbar durch $f(-1) = 4$.



b) $f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{(x+1)(x^2 + x - 6)} = \frac{(x-1)(x^2 - 4)}{x^2 + x - 6}$

Die Funktion f ist also in -1 stetig fortsetzbar durch $f(-1) = -1$.



c) Die Funktion f ist in -1 nicht stetig fortsetzbar, da $\lim_{x \rightarrow -1} |f(x)| = \infty$ ist.

