Mathematik 1: Übungsblatt - Folgen 2

1. Aufgabe:

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) Bei einer Folge wird jedem Index n eindeutig ein Folgenglied a_n zugeordnet.

b) Bei einer Folge kann jedem Folgenglied a_n eindeutig ein Index n zugeordnet werden.

c) Es gibt keine Folge, die weder nach unten noch nach oben beschränkt ist.

d) Es gibt keine Folge, die gleichzeitig monoton steigt und fällt.

e) Es gibt keine Folge, die gleichzeitig streng monoton steigt und fällt.

Lösung:

a) **Wahr**.

b) **Falsch**. Wenn ein Folgenglied mehr als einmal in der Folge vorkommt (z. B. bei konstanten Folgen), kann diesem Folgenglied nicht eindeutig ein Index zugeordnet werden.

alternierende Folge

c) **Falsch**. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$ ist weder nach unten noch nach oben beschränkt.

d) **Falsch**. Jede konstante Folge steigt und fällt monoton. Bei monotonem Wachstum darf eine Folge bzw. eine Funktion auch konstant sein. Erst der Begriff 'strenge Monotonie' impliziert, dass nachfolgende Werte nicht gleich sein dürfen.

e) **Wahr**.

2. Aufgabe:

Finde eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die folgende beide Bedingungen gelten:

- $a_n < a_{n+2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $a_n > a_{n+1}$ für alle ungeraden n

Schreiben Sie anschließend eine explizite Bildungsvorschrift für diese Folge auf!

Lösung:

Eine mögliche Folge ist:
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1, 0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 7, 6, \ldots$
n 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Eine explizite Bildungsvorschrift für diese Folge ist

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} - 1 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

3. Aufgabe:

Ermitteln Sie die ersten 6 Glieder von Zahlenfolgen (a_n) mit den folgenden Eigenschaften:

- es ist $a_1 = -\frac{5}{2}$, $a_4 = 2$ und $a_5 = 3$
- $a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4$ sind in dieser Anordnung die ersten Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge.
- $a_4;\ a_5;\ a_6$ sind in dieser Reihenfolge die ersten Glieder einer geometrischen Zahlenfolge.

- Die Differenz d der arithmetischen und der Quotient q der geometrischen Zahlenfolge sind gleich.

Lösung:

Folgenumfang: $-2.5;\ -1;\ 0.5;\ 2;\ 3;\ 4.5;\ \ldots$
arithmetischer Teil: $d = 1.5$; geometrischer Teil: $q = 1.5$

4. Aufgabe:

Die Folge (a_n) ist jeweils eine **arithmetische** Zahlenfolge.
Vervollständigen Sie die Tabelle:

Lösung:

$d = a_2 - a_1 = 4$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_{10}	a_{17}	a_{25}	d	a_n
a)	1	5	9	13	37	65	97	4	$4n-3$
b)	-3	-5	-7	-9	-21	-35	-51	-2	$-2n-1$
c)	$2\frac{1}{10}$	3.7	$\frac{53}{10}$	6.9	$16\frac{1}{2}$	27.7	40.5	1.6	$1.6n+0.5$

kein ·
$\neq 2\cdot\frac{1}{10}$ ↯

$\frac{21}{10}$ $\frac{37}{10}$ $\frac{69}{10}$ $\frac{16}{10}$

5. Aufgabe:

Die Folge (a_n) ist jeweils eine **geometrischen** Zahlenfolge.
Vervollständigen Sie die Tabelle:

Lösung:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_{10}			q	a_n
a)	6	3	1.5	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{256}$			$\frac{1}{2}$ ✓	$6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ✓
b)	$-\frac{27}{4}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{78732}$			$-\frac{1}{3}$ ✓	$-\frac{27}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ✓

a)

$a_1 \stackrel{!}{=} a_1 \cdot q^0 = 6$

$a_2 \stackrel{!}{=} a_1 \cdot q^1 = 3 \Rightarrow q = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$a_4 = a_1 \cdot q^3 = 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 6\cdot\frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; $a_{10} \ldots$

b)

$a_1 = a_1 \cdot q^0$

$a_2 = a_1 \cdot q^1 = \frac{9}{4} \Rightarrow q = \frac{9}{4\cdot a_1} \Rightarrow q = \frac{\cancel{9}}{\cancel{4}}\cdot\left(-\frac{\cancel{4}}{\cancel{27}}\right) = -\frac{1}{3}$

$a_3 = a_1 \cdot q^2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow a_1 = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{q^2} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{(4a_1)^2}{9^2}$

$a_1 = -\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{16}\,a_1^2}{\cancel{4}\,3\,\cancel{9}\cdot 9} = -\frac{4\cdot a_1^2}{27} \quad \Big| : a_1$

$1 = -\frac{4}{27}\cdot a_1 \Rightarrow a_1 = -\frac{27}{4}$

$a_4 = -\frac{27}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{\cancel{27}}{4}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{27}}\right) = \frac{1}{4}$

$a_{10} = -\frac{27}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^9 = -\frac{27}{4}\cdot\left(-\frac{1}{19683}\right) = \ldots$

$\frac{27}{78732}$