

Mathematik 1: Übungsblatt - Folgen 1

1. Aufgabe:

Erklären Sie die Begriffe

- a) Menge
- b) Folge
- c) Reihe

Lösung:

- a) **Menge:** Ordnet man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl a_n eindeutig zu, so entsteht eine Menge.
- b) **Folge:** Im Unterschied zu einer Menge, kann bei einer Folge ein und das selbe Glied **mehrere Male** auftreten. Außerdem ist die **Reihenfolge der Elemente wichtig** (im Vergleich zu einer Menge), da hier zum Bilden der Elemente das Bildungsgesetz zu Grunde liegt.
- c) **Reihe:** Die **Summe der Glieder** einer Folge (oder eines Teils der Folgenglieder) wird als Reihe bezeichnet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Produktreihe:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \quad \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

2. Aufgabe:

Gegeben sind die ersten Glieder einer Zahlenfolge. Schreiben Sie die nächsten 4 dazu und geben die Bildungsvorschrift mit Worten an und bestimmen Sie das Bildungsgesetz.

a) $-24; -23; -20; -15; \dots$

b) $\frac{4}{3}; 1; \frac{8}{9}; \frac{10}{12}; \dots$

Lösung: $3 \cdot 2$ $3 \cdot 3$ $3 \cdot 4$

a) $-24; -23 = -24 + 1; -20 = -24 + 4; -15 = -24 + 9; -8; 1; 12; 25; \dots$

Die Folge entsteht aus -24 durch Addition der Quadratzahlen $0, 1, 4, 9, 16, \dots$. Das Bildungsgesetz lautet: $(a_n) = (-24 + (n-1)^2)$ mit $n \in \mathbb{N}$

b) $\frac{4}{3}; 1 = \frac{6}{6}; \frac{8}{9}; \frac{10}{12}; \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; \frac{14}{18} = \frac{7}{9}; \frac{16}{21}; \frac{18}{24} = \frac{3}{4}; \dots$

Beginnend mit $\frac{4}{3}$ wird fortgesetzt, indem im Zähler mit 2 addiert und im Nenner mit 3 addiert wird. Das Bildungsgesetz lautet: $(a_n) = \left(\frac{4+2(n-1)}{3+3(n-1)} \right)$ mit $n \in \mathbb{N}$

3. Aufgabe:

Geben Sie die ersten 6 Glieder der Folge und ihren Definitionsbereich an:

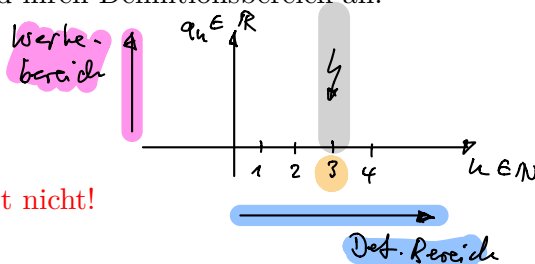
$$a_n = \frac{3n+1}{n-3}$$

Lösung:

Die Elemente ergeben:

$a_1 = -2; a_2 = \frac{7}{-1} = -7; a_3 = \frac{10}{0} \rightarrow$ existiert nicht!

$a_4 = 13; a_5 = 8; a_6 = \frac{19}{3}; \dots$



Hier gibt es für die Zahl 3 keinen Funktionswert, d.h. das 3. Glied der Folge existiert nicht. Sie hat ausnahmsweise einen eingeschränkten Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{N} \setminus \{3\}$

$$a_1 = \frac{3 \cdot 1 + 1}{1 - 3} = \frac{4}{-2} = -2 \quad \dots \quad a_3 = \frac{3 \cdot 3 + 1}{3 - 3} = \frac{10}{0} \quad \text{!} \quad \dots$$

4. Aufgabe:

Zu untersuchen ist, ob die Folge $\left(\frac{2n-3}{n}\right)$ streng monoton steigend ist.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 & \text{Induktion: } n : (n+1) \\
 & \boxed{a_n < a_{n+1}} \\
 \Rightarrow & \frac{2n-3}{n} < \frac{2(n+1)-3}{n+1} \quad | \cdot (n+1), \cdot n \\
 \Rightarrow & (2n-3)(n+1) < (2n-1)n \\
 \Rightarrow & 2n^2 - n - 3 < 2n^2 - n
 \end{aligned}$$

Die Aussage ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Folge wegen $a_n < a_{n+1}$ streng monoton steigend.

5. Aufgabe:

Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz

$$a_n = \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

Lösung:

$$a_n = 1, 0, -1, 0, 1, \dots$$

Die Folgenglieder wechseln zwischen mehreren Werten und besitzen keinen Grenzwert. Daher ist diese unbestimmt divergent (Folgen mit uneigentlichen Grenzwert ∞ werden als bestimmt bezeichnet).

6. Aufgabe:

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \frac{4n}{2n} = 2$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2
 \end{aligned}$$

7. Aufgabe:

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n-1}{n^2} + \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \right]$$

Lösung:

$$\text{Aus } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5} \right)^n = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1; \quad \text{folgt:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n-1}{n^2} + \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \right] = 0$$

$> 0?$ $\rightarrow \infty$
 $< 0?$ $\rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 |a_n| &< 0? \\
 |a_n| &> 0?
 \end{aligned}$$

