# Mathematik 1: Übungsblatt - Folgen 1

1. **Aufgabe:**

   Erklären Sie die Begriffe

   a) Menge

   b) Folge

   c) Reihe

   **Lösung:**

   a) **Menge:** Ordnet man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a_n$ eindeutig zu, so entsteht eine Menge.

   b) **Folge:** Im Unterschied zu einer Menge, kann bei einer Folge ein und das selbe Glied **mehrere Male** auftreten. Außerdem ist die **Reihenfolge der Elemente wichtig** (im Vergleich zu einer Menge), da hier zum Bilden der Elemente das Bildungsgesetz zu Grunde liegt.

   c) **Reihe:** Die **Summe der Glieder** einer Folge (oder eines Teils der Folgenglieder) wird als Reihe bezeichnet.

2. **Aufgabe:**

   Gegeben sind die ersten Glieder einer Zahlenfolge. Schreiben Sie die nächsten 4 dazu und geben die Bildungsvorschrift mit Worten an und bestimmen Sie das Bildungsgesetz.

   a) $-24;\ -23;\ -20;\ -15;\ \ldots$

   b) $\frac{4}{3};\ 1; \frac{8}{9};\ \frac{10}{12};\ \ldots$

   **Lösung:**

   a) $-24;\ -23 = -24+1;\ -20 = -24+4;\ -15 = -24+9;\ -8;\ 1;\ 12;\ 25;\ \ldots$

   Die Folge entsteht aus $-24$ durch Addition der Quadrahtzahlen $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$ Das Bildungsgesetz lautet: $\boldsymbol{(a_n) = (-24 + (n-1)^2)} = -24;\ -23;\ -20;\ -15;\ \ldots$ mit $n \in \mathbb{N}$

   b) $\frac{4}{3};\ 1 = \frac{6}{6};\ \frac{8}{9};\ \frac{10}{12};\ \frac{12}{15} = \frac{4}{5};\ \frac{14}{18} = \frac{7}{9};\ \frac{16}{21};\ \frac{18}{24} = \frac{3}{4}; \ldots$

   Beginnend mit $\frac{4}{3}$ wird fortgesetzt, indem im Zähler mit 2 addiert und im Nenner mit 3 addiert wird. Das Bildungsgesetz lautet: $(a_n) = \left(\frac{4+2(n-1)}{3+3(n-1)}\right) = \frac{4}{3};\ 1; \frac{8}{9};\ \frac{10}{12};\ \ldots$ mit $n \in \mathbb{N}$

3. **Aufgabe:**

   Geben Sie die ersten 6 Glieder der Folge und ihren Definitionsbereich an:

   $$a_n = \frac{3n+1}{n-3}$$

   **Lösung:**

   Die Elemente ergeben:

   $a_1 = -2;\ a_2 = \frac{7}{-1} = -7;\ a_3 = \frac{10}{0} \rightarrow$ existiert nicht!

   $a_4 = 13;\ a_5 = 8;\ a_6 = \dfrac{19}{3};\ \ldots$

   Hier gibt es für die Zahl 3 keinen Funktionswert, d.h. das 3. Glied der Folge existiert nicht. Sie hat ausnahmsweise einen eingeschränkten Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{N} \backslash \{3\}$

**4. Aufgabe:**

Zu untersuchen ist, ob die Folge $\left(\frac{2n-3}{n}\right)$ streng monoton steigend ist.

**Lösung:**

$$\begin{array}{rrcl} & a_n & < & a_{n+1} \\ \Rightarrow & \frac{2n-3}{n} & < & \frac{2(n+1)-3}{n+1} \\ \Rightarrow & (2n-3)(n+1) & < & (2n-1)n \\ \Rightarrow & 2n^2-n-3 & < & 2n^2-n \end{array}$$

Die Aussage ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Folge wegen $a_n < a_{n+1}$ streng monoton steigend.

**5. Aufgabe:**

Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz

$a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

**Lösung:**
$a_n = 1, 0, -1, 0, 1...$
Die Folgenglieder wechseln zwischen mehreren Werten und besitzen keinen Grenzwert. Daher ist diese unbestimmt divergent (Folgen mit uneigentlichen Grenzwert $\infty$ werden als bestimmt bezeichnet).

**6. Aufgabe:**

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1}$$

**Lösung:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

**7. Aufgabe:**

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n-1}{n^2} + \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}\right]$$

**Lösung:**

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right) = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ ; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ ; folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n-1}{n^2} + \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}\right] = 0$$