Mathematik 1: Übungsblatt - Lineare Abbildungen 2

1. **Aufgabe:**

   Gesucht sind die Eigenwerte der Matrix A

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$$

   Lösung:

   Rechenansatz

   $$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   Determinante berechnen

   $$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & 0 \\ -9 & (6-\lambda) \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} &= (3-\lambda)\cdot(6-\lambda) - (-9)\cdot 0 \\ &= \lambda^2 - 9\lambda + 18 \end{aligned}$$

   Mit Hilfe der Mitternachtsformel berechnen wir die Nullstellen dieser quadratischen Gleichung zu

   $$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 6;$$

   Dabei handelt es sich um die beiden Eigenwerte der Matrix A.

2. **Aufgabe:**

   Gesucht sind die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   Lösung:

   Berechnen des charakteristischen Polynoms

   $$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = &\begin{vmatrix} (3-\lambda) & -1 & 0 \\ 2 & (0-\lambda) & 0 \\ -2 & 2 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)\cdot(0-\lambda)\cdot(-1-\lambda) - (-1-\lambda)\cdot 2\cdot(-1) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 \end{aligned}$$

   Berechnen (bzw. raten (0,1,-1...)) der Nullstellen

   $$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = -1;$$

Ansatz zum Berechnen der Eigenvektoren:

$$(A - \lambda_i E)x_i = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} (3-\lambda_i) & -1 & 0 \\ 2 & (0-\lambda_i) & 0 \\ -2 & 2 & (-1-\lambda_i) \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} (3-\lambda_i)x & -1y & 0z \\ 2x & (0-\lambda_i)y & 0z \\ -2x & 2y & (-1-\lambda_i)z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Um Schreibarbeit zu sparen, lassen wir dabei überflüssige Informationen weg. Übrig bleibt:

$$\begin{pmatrix} (3-\lambda_i) & -1 & 0 \\ 2 & (0-\lambda_i) & 0 \\ -2 & 2 & (-1-\lambda_i) \end{pmatrix}$$

Im Folgenden berechnen wir nacheinander die Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 und λ_3.

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} (3-1) & -1 & 0 \\ 2 & (0-1) & 0 \\ -2 & 2 & (-1-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II) - I)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III) + I)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ausgeschrieben ergibt das

$$\begin{aligned} 2x - y = 0 \quad &\rightarrow \quad x = 0,5y \\ y - 2z = 0 \quad &\rightarrow \quad y = 2z \end{aligned}$$

Daraus folgt: $x = 0,5y = z$

Das vorliegende Gleichungssystem besitzt zwei Gleichungen, aber drei Unbekannte. Das bedeutet, dass das Gleichungssystem unterbestimmt ist und es unendlich viele Lösungen gibt. Eine spezielle Lösung erhält man, indem man für eine der Variablen einen beliebigen Wert einsetzt. Wir setzen $x = 1$, um den ersten Eigenvektor zu berechnen.

Einsetzen von $x = 1$ ergibt den Eigenvektor

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} (3-2) & -1 & 0 \\ 2 & (0-2) & 0 \\ -2 & 2 & (-1-2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II) - 2 \cdot I)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III) + 2 \cdot I)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ausgeschrieben ergibt das

$$\begin{aligned} x - y &= 0 & \rightarrow \quad x &= y \\ -3z &= 0 & \rightarrow \quad z &= 0 \end{aligned}$$

Das vorliegende Gleichungssystem besitzt zwei Gleichungen, aber drei Unbekannte. Das bedeutet, dass das Gleichungssystem unterbestimmt ist und es unendlich viele Lösungen gibt. Eine spezielle Lösung erhält man, indem man für x oder für y einen beliebigen Wert einsetzt. Wir setzen $x = 1$, um den zweiten Eigenvektor zu berechnen.

Einsetzen von $x = 1$ ergibt den Eigenvektor

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} (3-(-1)) & -1 & 0 \\ 2 & (0-(-1)) & 0 \\ -2 & 2 & (-1-(-1)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III) + II)} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II) - 0,5 \cdot I)} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ausgeschrieben ergibt das

$$\begin{aligned} 4x - y &= 0 & \rightarrow \quad y &= 4x \\ 1,5y &= 0 & \rightarrow \quad y &= 0 \\ 3y &= 0 & \rightarrow \quad y &= 0 \end{aligned}$$

Die Variablen x und y sind gleich Null. Die Variable z hingegen nimmt einen beliebigen Wert an. Es gibt wieder unendlich viele Lösungen. Eine spezielle Lösung erhält man, indem man z.B. $z = 1$ setzt. Auf diese Weise erhalten wir den dritten und letzten Eigenvektor.

Einsetzen von $z = 1$ ergibt den Eigenvektor

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Aufgabe:

Bestimmen Sie die **Eigenwerte** und die **Eigenvektoren** folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eigenwerte:

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$\chi_A = \det(A) = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = \text{SARRUS} \ldots$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0$$

Nullstellen berechnen mit DHBW-Taschenrechner oder....

Nullstelle $\lambda_1 = 1$ geraten! $-1 + 7 - 11 + 5 = 0$ ✓ passt!

1. Polynomdivision: $\lambda_1 = 1$

$$\begin{array}{l} (-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 6\lambda - 5 \Rightarrow \lambda_2 = 1 \\ (-)\ \underline{-\lambda^3 + \lambda^2} \\ \quad 0 + 6\lambda^2 - 11\lambda \\ \quad\quad \underline{6\lambda^2 - 6\lambda} \\ \quad\quad 0 - 5\lambda + 5 \\ \quad\quad\quad \underline{-5\lambda + 5} \\ \quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$\Downarrow$

Sieht man! ;-)

2. Polynomdivision: $\lambda_2 = 1$

$$\begin{array}{l} (-\lambda^2 + 6\lambda - 5) : (\lambda - 1) = -\lambda + 5 \\ (-)\ \underline{-\lambda^2 + \lambda} \\ \quad\quad 5\lambda - 5 \\ \quad\quad \underline{5\lambda - 5} \\ \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$\Downarrow$

$\lambda_3 = 5$

andere Schreibweise:

$-\lambda^3 - 7\lambda - 11\lambda + 5 = 0$

$(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 5) = 0$

$(\lambda_{1/2} - 1)^2 (\lambda_3 - 5) = 0$

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad ; \quad \lambda_3 = 5}$$

Eigenvektoren: $\lambda_{1/2}$ Einsetzen: $\lambda_{1/2} = 1$:

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Lösen (Gauß ....)

$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ I - II \\ I - III \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightsquigarrow v_2 \text{ beliebig!} \\ \rightsquigarrow v_3 \text{ beliebig!} \end{array}$$

Annahme: $a \triangleq v_2$; $b = v_3$

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + a + 2b = 0 \\ v_1 = -a - 2b \\ v_2 = a \\ v_3 = b \end{array}\right\} \quad L_{1/2} = \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\triangleq$$

$$\boxed{\begin{array}{l} v_1 = -a - 2b \\ v_2 = a \\ v_3 = b \end{array}}$$

$\lambda = 5:$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Gauß} \ldots$$

$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3\cdot II + I \\ 3 \cdot III + I \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ II + III \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_3 \text{ beliebig!}$$

Annahme: $c = v_3$

$$\left.\begin{aligned} -v_2 + c = 0 &\rightsquigarrow v_2 = c \\ -3v_1 + c + 2c = 0 &\Rightarrow v_1 = c \end{aligned}\right\} L_3 = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$$

$\widehat{=}$

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= c \\ v_2 &= c \\ v_3 &= c \end{aligned}}$$