Mathematik 1: Übungsblatt - Lineare Abbildungen 1

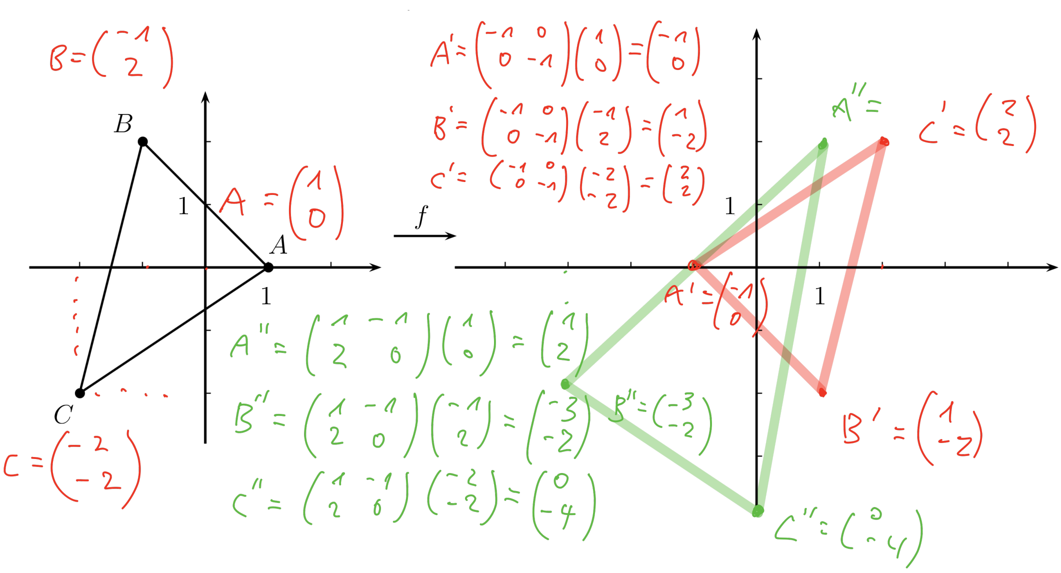
1. Aufgabe:

Betrachtet werden die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_1(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot x \quad \text{und} \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot x$$

die jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ der Ebene einen Punkt $f(x) \in \mathbb{R}^2$ zuordnen.
Wie wird bei diesen Abbildungen das dargestellte Dreieck abgebildet?
Zeichnen Sie die Bilder in das rechte Koordinatensystem.

Lösung:



2. Aufgabe:

Betrachtet wird die Abbildung

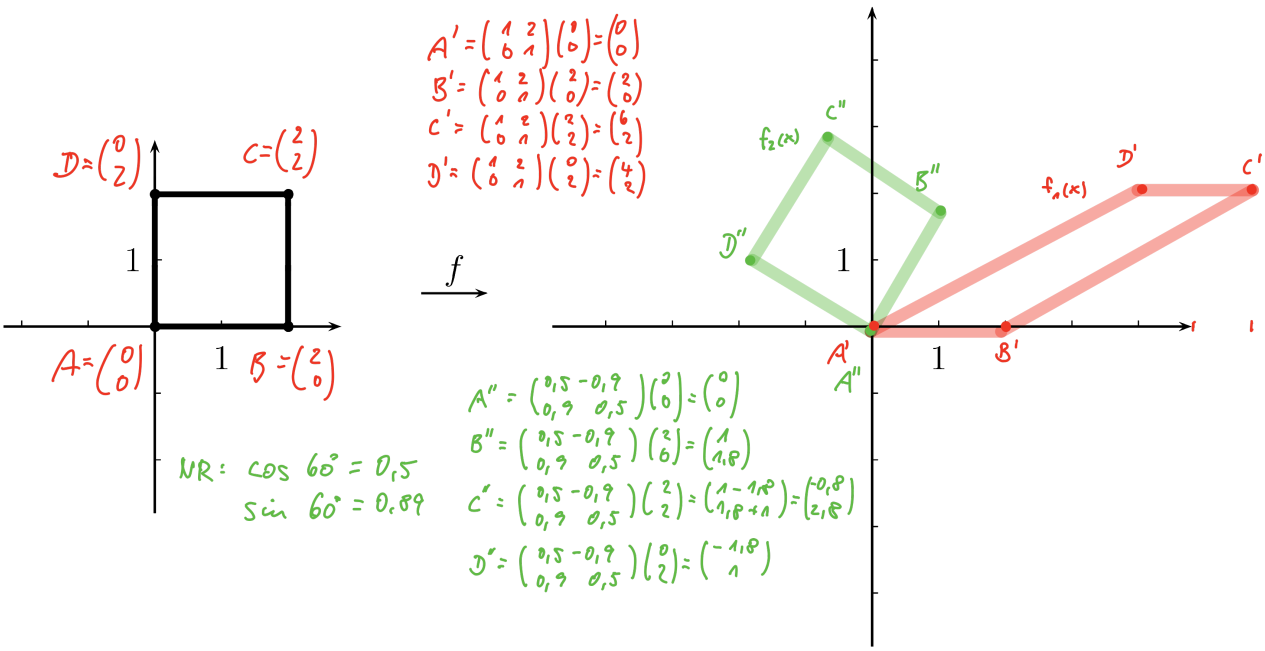
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f_1(x)=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot x \text{ und } f_2(x)=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\ \sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\cdot x$$

die jedem Punkt $x\in\mathbb{R}^2$ der Ebene einen Punkt $f(x)\in\mathbb{R}^2$ zuordnet.

Wie wird bei diesen Abbildungen das dargestellte Quadrat abgebildet?
Nehmen Sie bei $f_2(x)$ den Winkel $\varphi=60^\circ\left(\text{bzw. } \frac{\pi}{3}\right)$ an.

Zeichnen Sie die beiden Bilder in das rechte Koordinatensystem.

Lösung:



3. Aufgabe:

Geben Sie eine Matrix M an, so dass die Abbildung $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x)=M\cdot x$

den Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ **und** den Vektor $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ abbildet.

Lösung:

Wegen $M\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ die erste Spalte von M, also $M=\begin{pmatrix}2&c\\-1&d\end{pmatrix}$. Wegen

$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=M\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&c\\-1&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+c\\-3+d\end{pmatrix}$

folgt $c=-2$ und $d=4$, also $M=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&4\end{pmatrix}$.