

Mathematik 1: Zusatzübung - Vektorrechnung

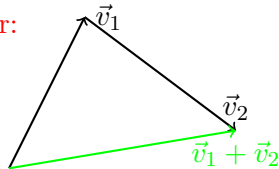
1. Aufgabe:

Die zeichnerische Lösung bzw. Interpretation der Addition von zwei Vektoren $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ist bekannt (Parallelogramm).

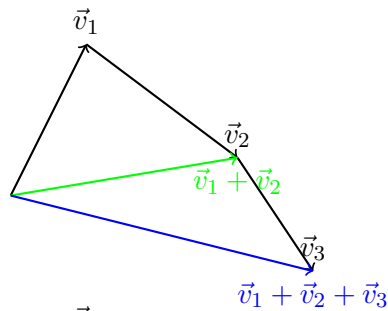
- a) Machen Sie sich zeichnerisch klar, was $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ graphisch bedeutet.
- b) Was bedeutet es, wenn man weitere Vektoren addiert?

Lösung:

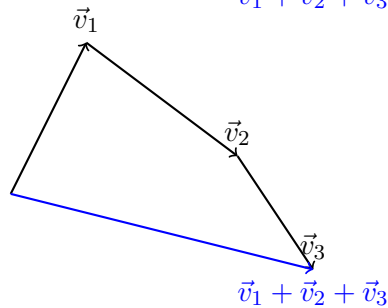
Aus der Vorlesung wissen wir:



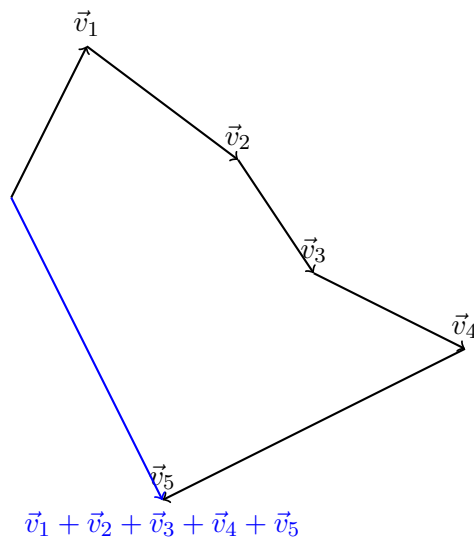
und da: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3$ ist nun:



Und schließlich:



Damit erhält man also für weitere Vektoren die addiert werden bildlich einen "Ringschluss".



2. Aufgabe:

Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) Zeigen Sie (ohne Verwendung der Determinante), dass $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear unabhängig sind.
- b) Berechnen Sie den von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ eingeschlossenen Winkel φ .

Lösung:

- a) Um zu zeigen, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear unabhängig sind, betrachten wir zunächst die Linearkombination und setzen diese 0:

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

woraus wir die beiden Gleichungen:

$$\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0, \quad -2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0.$$

Mit der zweiten Gleichung erhalten wir, dass

$$-2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow 2\lambda_2 = 2\lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 \quad (0.1)$$

Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 - 3\lambda_1 = 0 \Rightarrow -2\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

und da $\lambda_1 = \lambda_2$, siehe (0.1), ist $\lambda_2 = 0$. Somit ist die lineare Unabhängigkeit bewiesen. Alternative: Determinante aus $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ berechnen $\rightarrow$ det ungleich 0.

- b) Es ist zunächst:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 = -7 \\ |\vec{v}_1| &= \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \\ |\vec{v}_2| &= \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

Weiter ist per Definition:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|} = \frac{-7}{\sqrt{5}\sqrt{13}} \\ \Rightarrow \varphi &= \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right) = 2.6224 \approx \mathbf{150.26^\circ}. \end{aligned}$$

3. Aufgabe:

Gegeben seien die vier Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 17 \\ \ln(3) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sind diese vier Vektoren linear unabhängig?

Lösung:

Hier ist nichts zu tun, denn im zweidimensionalen Vektorraum sind mehr als 2 Vektoren automatisch linear abhängig.

4. Aufgabe:

Seien

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- a) Überprüfen Sie mit dem Gauss-Verfahren, ob die drei Vektoren linear unabhängig sind.
- b) Berechnen Sie $\vec{v} \times \vec{w}$.
- c) Berechnen Sie $[\vec{u}\vec{v}\vec{w}]$.

Lösung:

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 7\lambda_3 \\ \frac{1}{2}\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten drei Gleichungen. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 3, die zweite Gleichung mit -12 und die dritte Gleichung mit -2. Dies führt zu:

$$\begin{pmatrix} 6\lambda_1 + 9\lambda_2 - 21\lambda_3 \\ -6\lambda_1 + 12\lambda_2 - 24\lambda_3 \\ -6\lambda_1 - 4\lambda_2 + 8\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun können wir die erste Gleichung mit der zweiten addieren und die erste auch mit der dritten Gleichung addieren. Dies führt zu:

$$\begin{pmatrix} 6\lambda_1 + 9\lambda_2 - 21\lambda_3 \\ 21\lambda_2 - 45\lambda_3 \\ 5\lambda_2 - 13\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir die zweite Gleichung mit 5 und die dritte mit -21, erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 6\lambda_1 + 9\lambda_2 - 21\lambda_3 \\ 105\lambda_2 - 225\lambda_3 \\ -105\lambda_2 + 273\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Addieren der zweiten und dritten Gleichung liefert:

$$\begin{pmatrix} 6\lambda_1 + 9\lambda_2 - 21\lambda_3 \\ 105\lambda_2 - 225\lambda_3 \\ 48\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

woraus aus der letzten Gleichung sofort $\lambda_3 = 0$ folgt. Mit Hilfe der zweiten Gleichung folgt auch sofort $\lambda_2 = 0$ sowie mit der ersten Gleichung $\lambda_1 = 0$. Da dies offensichtlich die einzige Lösung der Gleichung ist, sind die drei Vektoren linear unabhängig.

b) Es ist:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4 \\ -14 + 12 \\ 6 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Es ist:

$$[\vec{u}\vec{v}\vec{w}] = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 - 1 - 3 = -4$$

5. Aufgabe:

Seien

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $v_3 \in \mathbb{R}$ derart, dass gilt:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{30}.$$

Lösung:

Seien

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_3 \\ -1 - 2v_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun soll gelten:

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v}| &= \sqrt{v_3^2 + (-1 - 2v_3)^2 + 1^2} = \sqrt{30} \\ \Rightarrow v_3^2 + (-1 - 2v_3)^2 + 1 &= 30 \\ \Rightarrow v_3^2 + (-1 - 2v_3)^2 + 1 &= 30 \\ \Rightarrow v_3^2 + 1 + 4v_3 + 4v_3^2 + 1 &= 30 \\ \Rightarrow 5v_3^2 + 4v_3 + 2 &= 30 \\ \Rightarrow 5v_3^2 + 4v_3 - 28 &= 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Mitternachtsformel (oder pq-Formel) erhalten wir:

$$v_3^\pm = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 560}}{10} = \frac{-4 \pm 24}{10}$$

also $v_3^+ = 2$, $v_3^- = -\frac{28}{10} = -\frac{14}{5}$. Wir erhalten also die zwei Lösungen:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

6. Aufgabe:

Sei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit eines Teilchens, welches sich durch ein (konstantes) Magnetfeld mit magnetischer Flussdichte $\vec{B}$ bewegt (vgl. Werte aus Aufgabe 5) und $\vec{F}_L$ die Lorentz-Kraft die auf das Teilchen wirkt. Bestimmen Sie die Ladung q des Teilchens.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Lösung:

Seien

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun soll:

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

woraus sich sofort $q = \frac{1}{10}$ (Coulomb) ergibt.

7. Aufgabe:

- a) Ein Flugzeug fliegt von $A(4; 2; 5)$ nach $B(12; 6; 10)$. In $S(10; 10; 4.75)$ befindet sich die Spitze eines Berges.
Wie weit fliegt das Flugzeug an dieser vorbei (minimaler Abstand in km)?
- b) Ein Ballon fliegt durch Koordinaten $C(13.2; 18.6; 19)$ und $D(3.2; -1.4; 9)$.
Wie nahe könnte theoretisch das Flugzeug dem Ballon kommen (theoretischer minimaler Abstand; dieser muss aber nicht dem tatsächlichen minimalen Abstand entsprechen, da die Zeit hier auch eine Rolle spielt und mit den obigen Angaben nur der minimale Abstand der Flugbahnen bestimmt werden kann)?
- c) Die Ebene $E : x - 2y = 4$ beschreibt eine Nebelwand.
- Wie ist die Lage der Nebelwand zur Flugbahn des Flugzeuges?
 - Welchen Abstand hat das Flugzeug zur Nebelwand?

Lösung:**a) Geradengleichung der Flugbahn:**

$$g : \vec{x} = \vec{0A} + r \cdot \vec{AB} \quad \text{mit} \quad \vec{AB} = \vec{0B} - \vec{A0}$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 12-4 \\ 6-2 \\ 10-5 \end{pmatrix} \quad \implies \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Möglichkeit: Punkt-Gerade, Formel aus dem Skript S. 16.

$$d = \frac{|(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

$$\text{mit } \vec{x}_1 = S = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 4.75 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_0 = A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

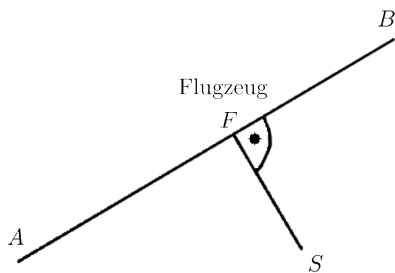
$$(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 10 - 4 \\ 10 - 2 \\ 4.75 - 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -0.25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 5 + 0.25 \cdot 4 \\ -0.25 \cdot 8 - 6 \cdot 5 \\ 6 \cdot 4 - 8 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ -32 \\ -40 \end{pmatrix}$$

$$|(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \times \vec{a}| = \sqrt{41^2 + (-32)^2 + (-40)^2} = \sqrt{4305} \approx 65.6$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 5^2} = 10.25$$

$$d = \frac{65.6}{10.25} \approx 6.4 \text{ km}$$

2. Möglichkeit: Lotfußpunkt-Methode: Berechnung des Lotfußpunktes von S auf g :



Der Vektor von S zu F ist orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden g . Da F auf g liegt, muss es ein r geben, so dass $\overrightarrow{0B} - \overrightarrow{A0}$ orthogonal zu $\overrightarrow{AB}$ ist (Skalarprodukt = 0):

$$\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 4.75 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 0.25 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$-6 \cdot 8 - 8 \cdot 4 + 0.25 \cdot 5 + r \cdot (8 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5) = 0$$

$$-78.75 + 105 \cdot r = 0 \quad \implies \quad r = \frac{3}{4}$$

$r = 3/4$ in g eingesetzt ergibt den Lotfußpunkt, bzw. zunächst dessen Ortsvektor:

$$\overrightarrow{0F} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8.75 \end{pmatrix}$$

Nun muss nur noch der Abstand von S zu F berechnet werden, bzw. die Länge von $\overrightarrow{SF}$:

$$|\overrightarrow{SF}| = \sqrt{(f_1 - s_1)^2 + (f_2 - s_2)^2 + (f_3 - s_3)^2}$$

$$|\overrightarrow{SF}| = \sqrt{0^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41} \approx 6.403 \quad \text{Also beträgt der Abstand ca. } \mathbf{6.4 \text{ km.}}$$

b) Wir bestimmen die Gleichung der Gerade h , die die Flugbahn des Ballons beschreibt:

$$h: \vec{x} = \overrightarrow{0C} + s \cdot \overrightarrow{CD} \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0D} - \overrightarrow{0C}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 13.2 \\ 18.6 \\ 19 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \vec{x}_2 + s \cdot \vec{a}_2, \quad (\text{Ballon}) \quad g: \vec{x} = \vec{x}_1 + r \cdot \vec{a}_1 \quad (\text{Flugzeug})$$

h und g sind nicht parallel, denn die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen (oder identisch):

$$\begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ -10 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{hat keine Lösung.}$$

Also sind die beiden Geraden windschief oder haben einen Schnittpunkt.

Wir berechnen direkt den Abstand (wenn es einen Schnittpunkt gibt, ist dieser eben gleich 0).

1. Möglichkeit: Formel Abstand zweier windschiefer Geraden Skript S. 17.

$$d = \frac{|(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)|}{|(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)|}$$

$$\text{mit } \vec{x}_2 = C = \begin{pmatrix} 13.2 \\ 18.6 \\ 19 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_1 = A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 13.2 - 4 \\ 18.6 - 2 \\ 19 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.2 \\ 16.6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-10) - 5 \cdot (-20) \\ 5 \cdot (-10) - 8 \cdot (-10) \\ 8 \cdot (-20) - 4 \cdot (-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 + 100 \\ -50 + 80 \\ -160 + 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ -120 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{60^2 + 30^2 + (-120)^2} = \sqrt{18900} \approx 137.48$$

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} 9.2 \\ 16.6 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ -120 \end{pmatrix} = 9.2 \cdot 60 + 16.6 \cdot 30 - 14 \cdot 120 = 552 + 498 - 1680 = -630$$

$$d = \frac{|630|}{137.477} \approx \mathbf{4.58 \text{ km}}$$

2. Möglichkeit: Lotfußpunkt-Methode. Wir lösen das Gleichungssystem nach r und s auf und setzen die Lösung für r in g und die für s in h ein. Damit ergeben sich die beiden Lotfußpunkte, deren Abstand gleich dem der beiden Geraden ist. Der Verbindungsvektor der Lotfußpunkte steht senkrecht auf beiden Richtungsvektoren.

Lotfußpunkte:

$$P = g(r), \quad Q = h(s)$$

Berechnung des Verbindungsvektors zwischen Punkten der Geraden:

$$\overrightarrow{PQ} = g(r) - h(s)$$

Koordinatenschreibweise:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 + 8r - (13.2 - 10s) \\ 2 + 4r - (18.6 - 20s) \\ 5 + 5r - (19 - 10s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.2 + 8r + 10s \\ -16.6 + 4r + 20s \\ -14 + 5r + 10s \end{pmatrix}$$

Orthogonalitätsbedingung senkrecht zu g (Flugzeug):

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \quad \implies \quad \begin{pmatrix} -9.2 + 8r + 10s \\ -16.6 + 4r + 20s \\ -14 + 5r + 10s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} 8(-9.2 + 8r + 10s) + 4(-16.6 + 4r + 20s) + 5(-10.5r + 20.0s) &= 210.8 \\ 105r + 200s &= 210.8 \quad (1) \end{aligned}$$

Orthogonalitätsbedingung senkrecht zu h (Ballon):

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ -10 \end{pmatrix} = 0 \quad \implies \quad \begin{pmatrix} -9.2 + 8r + 10s \\ -16.6 + 4r + 20s \\ -14 + 5r + 10s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ -10 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} -10(-9.2 + 8r + 10s) - 20(-16.6 + 4r + 20s) - 10(-14 + 5r + 10s) &= -564 \\ -210r - 600s &= -564 \quad (2) \end{aligned}$$

Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 105r + 200s &= 210.8 \quad (1) \\ -210r - 600s &= -564 \quad (2) \end{aligned}$$

Lösung:

$$r \approx 0.64, \quad s \approx 0.71$$

Minimaler Abstand:

$$\overrightarrow{PQ} \approx \begin{pmatrix} 3.44 \\ -0.88 \\ -2.94 \end{pmatrix}$$

$$d = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3.44^2 + (-0.88)^2 + (-2.94)^2} \approx \mathbf{4.58 \text{ km}}$$

c)

(i) Wir setzen die Geradengleichung für das Flugzeug

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad E: x - 2y = 4 \quad \text{ein,}$$

oder wir könnten auch den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ von E mit dem Richtungsvektor

von g 'skalar' multiplizieren.

Wenn das Skalarprodukt 0 ist, sind g und E parallel. Wobei g eventuell sogar in E liegen könnte.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 - 8 + 0 = 0 \quad \implies \quad \text{Also parallel.}$$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ in E eingesetzt ergibt einen Widerspruch, womit g 'echt' parallel zu E ist ('echt' parallel soll hier heißen, dass g zwar zu E parallel ist, g allerdings nicht in E liegt).

Das würde sich auch über das Einsetzen von $g(x = 4 + 8r, y = 2 + 4r$ und $z = 5 + 5r)$ in E ergeben:

$$x - 2y = 4$$

$$4 + 8r - 2 \cdot (2 + 4r) = 4 \iff 0 = 4 \text{ ist ein Widerspruch} \implies \textbf{'echt' parallel.}$$

(ii)

Nun muss nur noch der Abstand eines Punktes von g zu E berechnet werden:

Das machen wir über die Hesse Normalform (HNF) von E :

$$x - 2y - 4 = 0 \quad | : \sqrt{5} \quad \text{da } |\vec{n}| = \sqrt{1 + 4 + 0} = \sqrt{5}$$

$$\text{HNF: } \frac{x - 2y - 4}{\sqrt{5}} = 0$$

$$d = \left| \frac{x - 2y - 4}{\sqrt{5}} \right| \text{ ist der Abstand eines Punktes } (x; y; z) \text{ von } E.$$

Wir setzen den Stützvektor von g ein:

$$d = \left| \frac{4 - 2 \cdot 2 - 4}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{-4}{\sqrt{5}} \right| \approx \textbf{1.79}$$

Also beträgt der Abstand des Flugzeugs zur Nebelwand ca. **1.79 km**.

8. Aufgabe:

Zwei Flugzeuge fliegen in gerader Richtung. Die Flugbahn des ersten Flugzeuges lässt sich durch die Gerade

$$f_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

und die des zweiten Flugzeuges durch die Gerade

$$f_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ 6.6 \\ 3.1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

beschreiben. Wie groß ist der Abstand der Flugbahnen in km?

Lösung:

Die beiden Flugbahnen sind parallel, denn die Richtungsvektoren sind identisch (bei Parallelität könnten die Richtungsvektoren allgemein natürlich auch Vielfache sein).

1. Möglichkeit Punkt-Gerade, bei parallelen Geraden, Formel aus dem Skript S. 17.

$$d = \frac{|(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

$$\text{mit } \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4.2 \\ 6.6 \\ 3.1 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 4.2 - 2 \\ 6.6 - 2 \\ 3.1 - 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 4.6 \\ 0.1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.6 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 4 \\ 0.1 \cdot 3 - 2.2 \cdot 0.1 \\ 2.2 \cdot 4.6 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06 \\ 0.08 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$|(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \times \vec{a}| = \sqrt{0.06^2 + 0.08^2 + (-5)^2} \approx \sqrt{25.01} \approx 5$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0.1^2} = \sqrt{25.01} \approx 5$$

$$d = \frac{5}{5} = 1 \text{ km}$$

2. Möglichkeit Lotfußpunkt-Methode: Es genügt, den Abstand eines Punktes P von f_2 (z.B. von $P(4.2; 6.6; 3.1)$, was sich aus dem Stützvektor ergibt) zu f_1 zu berechnen. Hier können wir wie bei 7a) vorgehen:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.2 \\ 6.6 \\ 3.1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} -2.2 \\ -4.6 \\ -0.1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2.2 \cdot 3 - 4.6 \cdot 4 + 0.1 \cdot 0.1 + t \cdot (3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 0.1 \cdot 0.1) = 0$$

$$-25.01 + 25.01 \cdot t = 0 \quad \text{womit } t = 1 \text{ ist.}$$

$t = 1$ in f_1 eingesetzt ergibt den Lotfußpunkt, bzw. zunächst dessen Ortsvektor:

$$\overrightarrow{0F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3.1 \end{pmatrix}$$

Nun muss nur noch der Abstand von $'S'$ zu F berechnet werden, bzw. die Länge von $\overrightarrow{PF}$:

$$|\overrightarrow{PF}| = \sqrt{(f_1 - p_1)^2 + (f_2 - p_2)^2 + (f_3 - p_3)^2}$$

$$|\overrightarrow{PF}| = \sqrt{(5 - 4.2)^2 + (6 - 6.6)^2 + (3.1 - 3.1)^2} = \sqrt{1} = \mathbf{1}$$

Also beträgt der Abstand der Flugbahnen **1 km**.