Mathematik 1: Zusatzübung - Vektorrechnung

1. Aufgabe:

Die zeichnerische Lösung bzw. Interpretation der Addition von zwei Vektoren $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ist bekannt (Parallelogramm).

a) Machen Sie sich zeichnerisch klar, was $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ graphisch bedeutet.

b) Was bedeutet es, wenn man weitere Vektoren addiert?

Lösung:

Man erhält für weitere Vektoren die addiert werden bildlich einen "Ringschluss".

2. Aufgabe:

Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear unabhängig sind.

b) Berechnen Sie den von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ eingeschlossenen Winkel φ.

Lösung:

a) Um zu zeigen, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear unabhängig sind, betrachten wir zunächst die Linearkombination und setzen diese 0:

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $\Rightarrow \varphi \approx \mathbf{150.26°}$

3. Aufgabe:

Gegeben seien die vier Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 17 \\ \ln(3) \end{pmatrix}. \qquad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sind diese vier Vektoren linear unabhängig?

Lösung:

Wieviele Vektoren können maximal im Zwei-Dimensionalen linear unabhängig sein?

4. Aufgabe:

Seien

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie, ob die drei Vektoren linear unabhängig sind.

b) Berechnen Sie $\vec{v} \times \vec{w}$.

c) Berechnen Sie $[\vec{u}\vec{v}\vec{w}]$.

Lösung:

a) Es gilt:

$$\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 7\lambda_3 \\ \frac{1}{2}\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist:

$$[\vec{u}\vec{v}\vec{w}] = \mathbf{-4}$$

5. Aufgabe:

Seien

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $v_3 \in \mathbb{R}$ derart, dass gilt:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{30}.$$

Lösung:

Wir erhalten die zwei Lösungen:

$$\boldsymbol{\vec{v_1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\vec{v_2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{5}} \end{pmatrix}$$

6. Aufgabe:

Sei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit eines Teilchens, welches sich durch ein (konstantes) Magnetfeld mit magnetischer Flussdichte $\vec{B}$ bewegt (vgl. Werte aus Aufgabe 5) und $\vec{F}_L$ die Loretz-Kraft die auf das Teilchen wirkt. Bestimmen Sie die Ladung q des Teilchens.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Lösung:

Es ergibt sich $\boldsymbol{q = \frac{1}{10}}$ (Coulomb).