Mathematik 1: Übungsblatt - Lineare Gleichungen 2

1. Aufgabe:

Welchen Rang haben die Matrizen? Verwenden Sie den Gaußschen Algorithmus.
Berechnen Sie auch die Determinanten der Matrizen.
Welcher Zusammenhang besteht zum Rang?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

a) Überführung in Zeilenstufenform (Gaußscher Algorithmus):

$$\begin{array}{rrrl}
1 & 12 & 5 & \\
2 & 4 & 5 & \text{II}-2\cdot\text{I} \\
1 & 8 & 4 & \text{III}-\text{I} \\ \hline
1 & 12 & 5 & \text{II}-2\cdot\text{I} \\
0 & -20 & -5 & \\
0 & -4 & -1 & \cdot(-1),\ 2.\text{ und } 3.\text{ Zeile vertauschen} \\ \hline
1 & 12 & 5 & \text{II}-2\cdot\text{I} \\
0 & 4 & 1 & \\
0 & -20 & -5 & \text{III}+5\cdot\text{II} \\ \hline
\mathbf{1} & \mathbf{12} & \mathbf{5} & \text{II} \\
\mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \text{Rang}(\boldsymbol{A}) = 2 \\ \hline
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

b) Überführung in Zeilenstufenform (Gaußscher Algorithmus):

$$\begin{array}{rrrl}
1 & 12 & 5 & \\
2 & 4 & 4 & \text{II}-2\cdot\text{I} \\
1 & 8 & 4 & \text{III}-\text{I} \\ \hline
1 & 12 & 5 & \text{II}-2\cdot\text{I} \\
0 & -20 & -6 & \\
0 & -4 & -1 & \cdot(-1),\ 2.\text{ und } 3.\text{ Zeile vertauschen} \\ \hline
1 & 12 & 5 & \text{II}-2\cdot\text{I} \\
0 & 4 & 1 & \\
0 & -20 & -6 & \text{III}+5\cdot\text{II} \\ \hline
\mathbf{1} & \mathbf{12} & \mathbf{5} & \text{II} \\
0 & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \text{Rang}(\boldsymbol{A}) = 3 \\ \hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} &
\end{array}$$

Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 60 + 80 - 20 - 40 - 96 = 0$

Da der Rang 2 ist und die Matrix linear abhängige Spalten enthält, ist die Determinante gleich 0.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 48 + 80 - 20 - 32 - 96 = -4$

Die Determinante einer quadratischen Matrix ist genau dann gleich 0, wenn die Matrix linear abhängige Zeilen und Spalten enthält. Das ist hier nicht der Fall. Der Rang ist 3, alle (Zeilen und) Spalten sind linear unabhängig und die Determinante ist ungleich 0.

2. Aufgabe:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & a \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det(A)$ und A^{-1} in Abhängigkeit vom Parameter a !

b) Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x \quad\;\; + 3z &= 3 \\ 2x + \;\; y + 8z &= 2 \\ 2x - 3y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

Lösung:

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = a - 18 - 6 + 24 = a$

Entweder Methode mit Berechnung der Unter-Determinanten, oder folgender Lösungsvorschlag nur durch Umformen der Matrizen:

Ansatz:

$\left(A \;\middle|\; E \right)$ "gedanklich" beide Seiten Mit A^{-1} multiplizieren

$\left(A^{-1} \cdot A \;\middle|\; A^{-1} \cdot E \right)$

$\left(E \;\middle|\; A^{-1} \right)$ umformen von $\left(A \;\middle|\; E \right)$, so dass links E steht.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & a & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & a-6 & -2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & -8 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{a} & \frac{3}{a} & \frac{1}{a} \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{a+24}{a} & \frac{-9}{a} & \frac{-3}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2a+16}{a} & \frac{a-6}{a} & \frac{-2}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{a} & \frac{3}{a} & \frac{1}{a} \end{array}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a+24 & -9 & -3 \\ -2a+16 & a-6 & -2 \\ -8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Im Falle $a=0$ ist die Matrix A nicht invertierbar.

b) Mit $a=6$ ergibt sich aus dem Ergebnis von a)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 30 & -9 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 72 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

also ist $x=12$, $y=2$ und $z=-3$.