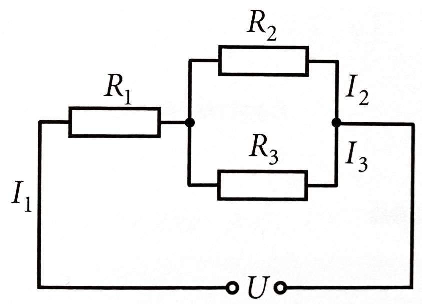
Mathematik 1: Übungsblatt - Lineare Gleichungen 1

1. Aufgabe:

Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für die Ströme I_1, I_2, I_3, Widerstände R_1, R_2, R_3 und die Spannung U auf. Verwenden Sie dabei die beiden Kirchhoffschen Regeln und bestimmen Sie die zugehörige Koeffizientenmatrix A.



Lösung:

$$\begin{array}{rrrcl} I_1 & -I_2 & -I_3 & = & 0 \\ R_1 I_1 & +R_2 I_2 & & = & U \\ & R_2 I_2 & -R_3 I_3 & = & 0 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe:

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem und interpretieren Sie die Lösungsmenge geometrisch.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{array}{ccc|c|l} 1 & 4 & 1 & 10 & \mathrm{I} \\ 1 & 2 & 1 & 8 & \mathrm{II} \\ 1 & 1 & -1 & 3 & \mathrm{III} \end{array} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} 1 & 4 & 1 & 10 & \mathrm{I} \\ 0 & 2 & 0 & 2 & \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ 0 & 3 & 2 & 7 & \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{array}$$

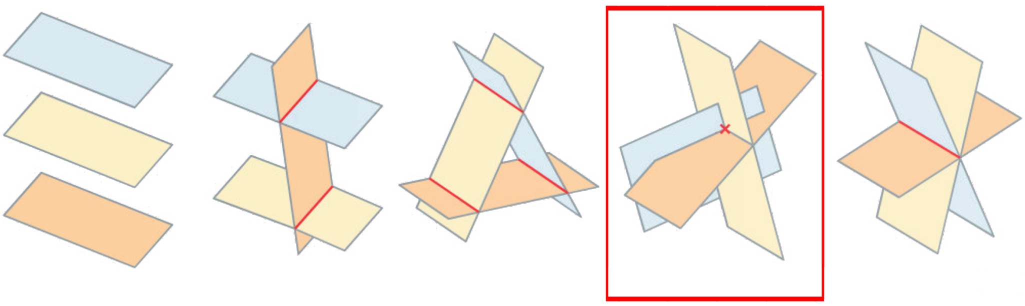
$\rightsquigarrow 2x_2 = 2 \rightsquigarrow x_2 = 1$

$\rightsquigarrow 3 \cdot 1 + 2x_3 = 7 \rightsquigarrow x_3 = \frac{7-3}{2} = 2$

$\rightsquigarrow x_1 + 4 + 2 = 10 \rightsquigarrow x_1 = 4$

$\mathbb{L} = \{(4|1|2)\}$

Die 3 Gleichungen beschreiben 3 Ebenen im Raum.
Diese Ebenen schneiden sich alle 3 in einem Punkt $P(4|1|2)$.



3. Aufgabe:

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit der Cramerschen Regel.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & & & 4x_3 & = & 3 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & & & = & 6 \end{array}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \ .$$

Nach der Cramerschen Regel benötigen wir für die Lösung dieses Gleichungssystems die 4 Determinanten

$$\det A, \quad \det A_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \det A_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \det A_3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \ ,$$

die wir wie folgt berechnen können:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot 4) + 4 \cdot (5 \cdot 4 - 2 \cdot 2) \\ &= -4 + 4 \cdot 16 = 60 \end{aligned}$$

$$\det A_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \left(A_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \textit{ entsteht wieder aus } A\textit{, indem wir die erste Spalte von } A \textit{ durch } b \textit{ ersetzen}\right)$$

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot 4) + 4 \cdot (1 \cdot 4 - 2 \cdot 6) \\ &= 3 \cdot (-4) + 4 \cdot (4 - 12) \\ &= -12 - 32 \\ &= -44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|A_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}\right| &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot 6) - 3 \cdot (5 \cdot 0 - 1 \cdot 2) + 4 \cdot (5 \cdot 6 - 1 \cdot 2) \\ &= 1 \cdot (-6) - 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (30 - 2) \\ &= -6 + 6 + 112 \\ &= 112 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left| A_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (2 \cdot 6 - 1 \cdot 4) + 3 \cdot (5 \cdot 4 - 2 \cdot 2) \\
&= 1 \cdot 8 + 3 \cdot 16 \\
&= 56
\end{aligned}
$$

Als Lösung für unser Gleichungssystem erhalten wir damit

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\left| A_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right|}{|A|} = -\frac{44}{60} = -\frac{11}{15} \\
x_2 &= \frac{\left| A_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right|}{|A|} = \frac{112}{60} = \frac{28}{15} \\
x_3 &= \frac{\left| A_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right|}{|A|} = \frac{56}{60} = \frac{14}{15}
\end{aligned}
$$

An diesem Beispiel deutet sich bereits an, dass der Rechenaufwand für die Cramersche Regel bei Gleichungssystemen mit mehr als zwei Unbekannten recht hoch wird. Noch deutlicher wird dies bei größeren Werten von N.