Mathematik 1: Übungsblatt - Matrizen 1

1. Aufgabe:

Berechnen Sie

a) $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 1 \\ 4 & -2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

	A		$\cdot$	B		$=$	C	
	Zeilen	Spalten		Zeilen	Spalten		Zeilen	Spalten
a)	2	3	=	3	4		2	4
b)	4	2	=	4	2		↯	
c)	3	1	=	1	3		3	3
d)	1	3	=	3	1		1	
e)	2	2	=	2	2		2	2
f)	2	2	=	2	2		2	2

a) Falksches Schema:

			3	0	0	1
			1	0	1	0
			1	1	0	0
1	2	4	9	4	2	1
2	1	1	8	1	1	2

$= \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ ✓

b) Typen 4×2, 4×2 unverträglich: Produkt nicht definiert

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ Typen $3 \times 1,\ 1 \times 3 \ \Rightarrow\ 3 \times 3$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{6})$ Typen $1 \times 3,\ 3 \times 1 \ \Rightarrow\ 1 \times 1$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

(Nullmatrix, obwohl keine Nullmatix als Faktor!)

f) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{14} & \mathbf{-28} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-14} \end{pmatrix}$

(i.A. $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ d.h. Multiplikation nicht kommutativ))

2. Aufgabe:

Berechnen Sie die Determinanten.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \end{vmatrix}$$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5(-2) = \mathbf{22}$ (Sarrus)

Entwicklung nach 1. Spalte

$(+)1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} (+)5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 3 \cdot 4 - (-2) + 5 \cdot (-4 - 21) = 12 + 2 - 20 - 105$
$= -6 - 105 = -111$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \dots = \mathbf{-111}$ (Sarrus)

$(-1)^{1+3}$, $(-1)^4$, $+1$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$ Entwickle nach der Zeile wo min. eine 0 steht (2. Zeile, $i = 2$):

$= (-0) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = \dots = \mathbf{-111}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$ Entwickle nach der Zeile wo beide 0 stehen (3. Zeile, $i = 3$):

$3 \cdot 2 \cdot 4$

$= +0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-0) \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = \dots = \mathbf{24}$

bzw. bei einer Dreiecksmatrix ist die Determinante die Multiplikation der Diagonalelemente: $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \dots = -252$ (Entwickeln nach Spalte 2, oder Gaussalgorithmus)

$(-)0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 10 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}} - 0 \dots + \underbrace{\begin{vmatrix} & \end{vmatrix}}$

entwickeln oder Sarrus

f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 9 & 8 & 5 \\ 9 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \dots = \mathbf{-300}$

3. Aufgabe:

Berechnen Sie die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2f)

$(+)1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 & 5 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (+)-6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -6 \cdot (+1) \cdot \begin{vmatrix} 9 & 8 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$

$= (-6) \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -30 \cdot (3 \cdot 4 - 2) = -30 \cdot 10 = \underline{\underline{-300}}$

4. Aufgabe:

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

und untersuchen Sie die Matrizen auf Orthogonalität.

Lösung:

a) Entwicklung nach 3. Zeile: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1+1) = 2$

Für orthogonale Matrizen gilt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \boldsymbol{E}$ und daher $\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\right) = \det(\boldsymbol{E}) = 1$ sowie wegen $\det\left(\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\right) = \det(\boldsymbol{A})$ schließlich $(\det(\boldsymbol{A}))^2 = 1$, $\det(\boldsymbol{A}) = \pm 1$. Also kann die Matrix nicht orthogonal sein.

b) Entwicklung nach 3. Zeile: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (1+1) = 1$

Die bei a) angegebene **notwendige** Bedingung für die Orthogonaliät ist erfüllt. Allerdings ist die Bedingung nicht hinreichend, so dass die Orthogonalität noch getestet werden muss:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{E}\text{: Matrix nicht orthogonal.}$$

c) $\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) = 1$

Die bei a) angegebene notwendige Bedingung für die Orthogonaliät ist erfüllt. Test der Orthogonalität:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}\text{: Matrix orthogonal.}$$