Mathematik 1: Übungsblatt - Matrizen

1. Aufgabe:

Berechnen Sie

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 1 \\ 4 & -2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

a) Falksches Schema:

$$\begin{array}{ccc|cccc} & & & 3 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 9 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 2 \end{array} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

b) Typen 4×2, 4×2 unverträglich: Produkt nicht definiert

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ Typen $3 \times 1,\ 1 \times 3 \ \Rightarrow\ 3 \times 3$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{6}$ Typen $1 \times 3,\ 3 \times 1 \ \Rightarrow\ 1 \times 1$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

(Nullmatrix, obwohl keine Nullmatix als Faktor!)

f) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{14} & \mathbf{-28} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-14} \end{pmatrix}$

(i.A. $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ d.h. Multiplikation nicht kommutativ))

2. Aufgabe:

Berechnen Sie die Determinanten.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \quad 3 \cdot 4 - 5(-2) = \mathbf{22} \quad \text{(Sarrus)}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \quad ... = \mathbf{-111} \quad \text{(Sarrus)}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$ Entwickle nach der Zeile wo min. eine 0 steht (2. Zeile, $i = 2$):

$$= (-0) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = ... = \mathbf{-111}$$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$ Entwickle nach der Zeile wo beide 0 stehen (3. Zeile, $i = 3$):

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-0) \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = ... = \mathbf{24}$$

bzw. bei einer Dreiecksmatrix ist die Determinante die Multiplikation der Diagonalelemente: $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = ... =$ **-252** (Entwickeln nach Spalte 2, oder Gaussalgorithmus)

f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 9 & 8 & 5 \\ 9 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \quad ... = \mathbf{-300}$

3. Aufgabe:

Berechnen Sie die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

4. Aufgabe:

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

und untersuchen Sie die Matrizen auf Orthogonalität.

Lösung:

a) Entwicklung nach 3. Zeile: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1+1) = 2$

Für orthogonale Matrizen gilt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{E}$ und daher $\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\right) = \det(\boldsymbol{E}) = 1$ sowie wegen $\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\right) = \det(\boldsymbol{A})$ schließlich $(\det(\boldsymbol{A}))^2 = 1$, $\det(\boldsymbol{A}) = \pm 1$. Also kann die Matrix nicht orthogonal sein.

b) Entwicklung nach 3. Zeile: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (1+1) = 1$

Die bei a) angegebene **notwendige** Bedingung für die Orthogonaliät ist erfüllt. Allerdings ist die Bedingung nicht hinreichend, so dass die Orthogonalität noch getestet werden muss:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{E}: \text{ Matrix nicht orthogonal.}$$

c) $\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) = 1$

Die bei a) angegebene notwendige Bedingung für die Orthogonaliät ist erfüllt. Test der Orthogonalität:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}: \text{ Matrix orthogonal.}$$