Mathematik 1: Übungsblatt - Vektorrechnung 3

1. Aufgabe:

Gegeben: Punkte $A(4,1,5), B(1,3,4), C(6,3,5)$
Gesucht: Gleichung der Ebene aus 3 Punkten.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ 3-1 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 3-1 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe:

Gegeben: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
Punkt: $C(7,8,3)$
Gesucht: Gleichung der Ebene aus Punkt und Gerade.

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 8-3 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Aufgabe:

Gegeben: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
Gesucht: Gleichung der Ebene in Koordinatenform (Hessesche Normalform).

1. Schritt: Bestimmung des Normalenvektors der auf der Ebene senkrecht steht

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 6 - (-5) \cdot 3 \\ (-5) \cdot 2 - 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ -28 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ |\vec{n}| = \sqrt{39^2 + (-28)^2 + 1^2} \approx 48.02$$

$\Rightarrow$ Normalform:

$$E : \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 39 \\ -28 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

2. Bestimmung Hessesche Normalform (HNF) $\rightarrow$ ausmultiplizieren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 39 \\ -28 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 39 \\ -28 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad 39x_1 - 28x_2 + x_3 - 97 = 0 \quad$ mit $\ |\vec{n}|$:

$$\Rightarrow \textbf{HNF:} \quad \boldsymbol{\frac{39x_1 - 28x_2 + x_3 - 97}{48.02} = 0}$$

4. Aufgabe:

Berechnen Sie Schnittpunkt und (Schnitt-)Winkel der beiden Geraden:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Den Schnittpunkt erhält man durch Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen:

$$\vec{x}_1 + \lambda_1 \vec{a} = \vec{x}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2 \quad \Rightarrow \quad \text{LGS}$$

$$\begin{array}{ccccccccl} 1 & + & 2\lambda_1 & = & 2 & + & \lambda_2 & \Rightarrow & 2\lambda_1 - \lambda_2 = 1 \ ^{(1)} \\ 1 & + & \lambda_1 & = & & & -\lambda_2 & \Rightarrow & \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \ ^{(2)} \\ & & \lambda_1 & = & 2 & + & 2\lambda_2 \ ^{(3)} & & \end{array}$$

$^{(3)}$ in $^{(2)}$ einsetzen:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_2 & = & -1 \\ & & & & 3\lambda_2 & = & -3 \\ & & & & \lambda_2 & = & -1 \end{array}$$

Ergebnis einsetzen in $^{(2)}$:

$$\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & + & (-1) & = & -1 \\ \lambda_1 & - & 1 & = & -1 \\ & & \lambda_1 & = & 0 \end{array}$$

Summe $^{(1)}$ und $^{(2)}$:

$\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -1 \Rightarrow$ eindeutiger Schnittpunkt S

$$S_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } S_{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \circ \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2-1+2}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{1+1+4}} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $\varphi =$arccos$\left(\frac{1}{2}\right)$ **= 60° (Schnittwinkel)**

5. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(3|2|1)$ zu der der Geraden $g: x = (1|-2|3)^T + \lambda(1|-1|0)^T$.

$$d_p = \frac{|(\vec{x}_p - \vec{x}_0) \times \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\left|\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-6)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{44}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{44}{2}} = \sqrt{\mathbf{22}} \approx \mathbf{4.69\ LE}$$

Alternative Lösung:

$$\lambda_L = \frac{(\vec{x}_p - \vec{x}_0) \circ \vec{a}}{\vec{a} \circ \vec{a}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_L = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = -1$$

$$d_p = |\vec{x}_P - (\vec{x}_0 + \lambda_L \vec{a})| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right| = \sqrt{\mathbf{22}}$$

6. Aufgabe:

Gegeben sei $g: x = (0|2|-2)^T + \lambda(1|-2|1)^T$ und $E: 5x + 2y + 4z - 6 = 0$.
Berechnen Sie den Schnittpunkt von g mit E.

Koordinaten der Geraden in Ebenengleichung einsetzen:
$5(0 + \lambda) + 2(2 - 2\lambda) + 4(-2 + \lambda) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\lambda = 10 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$
λ in $g \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S(2|-2|0)}$

7. Aufgabe:

Gegeben sei $P(1|-2|4)$ und $E: -2x + 2y - z + 4 = 0$.
Bestimmen Sie den Abstand d_P von P zu E.

$$d_p = \frac{|(\vec{n} \circ (\vec{x}_p - \vec{x}_0)|}{|\vec{n}|} \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und z.B.} \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right]\right|}{\sqrt{9}} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{3} = \frac{|-2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 0|}{3} =$$

$$\frac{|-6|}{3} = \mathbf{2}$$

Alternative Lösung:

Aus $E \;\Rightarrow\;$ Hessesche Normalform: $\dfrac{-2x + 2y - z + 4}{\sqrt{9}} = 0$

$$d_P = |n_x x_P + n_y y_P + n_z z_P + d| \quad \Rightarrow d_P = \left|\frac{-2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 + 4}{3}\right| = \mathbf{2}$$

8. Aufgabe:

Gegeben sei $g_1 : x = (1|-2|3)^T + \lambda(1|-2|2)^T$ und $g_2 : x = (-4|5|6)^T + \lambda(2|1|2)^T$. Berechnen Sie den Winkel zwischen g_1 und g_2.

$$\cos < (g_1, g_2) = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} \quad \text{mit } g_1 : \vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1$$

$$\text{mit } g_2 : \vec{x} = \vec{x}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

$$\cos\varphi = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{4+1+4}} = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 2}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi \approx 64^\circ}$$