Mathematik 1: Übungsblatt - Vektorrechnung 2

1. Aufgabe:

Am Ort $R_1 = (1|2|3)$ m wirkt eine Punktladung mit $Q_1 = 3 \cdot 10^{-5}$ C und

am Ort $R_2 = (4|5|6)$ m wirkt eine Punktladung mit $Q_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ C.

Berechnen Sie die Kraft zwischen den beiden Ladungen mit vektorieller Darstellung.

Es gilt der vektorielle Ansatz: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{1,2}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}}$

Lösung:

$\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad Q_1 = 3 \cdot 10^{-5} C$

$\vec{r_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad Q_2 = 5 \cdot 10^{-5} C$

$$\vec{F} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{1,2}^2} \cdot \frac{\vec{r_{1,2}}}{r_{1,2}}$$

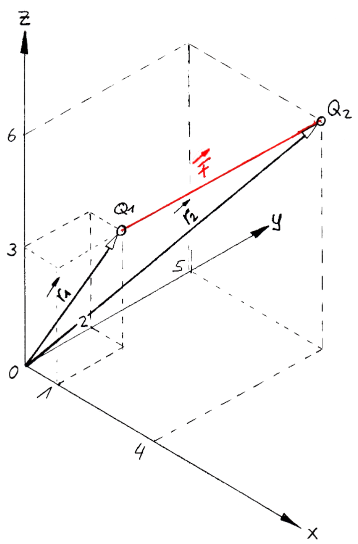
$$\vec{r_{1,2}} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$ Differenz

$$r_{1,2} = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$$ Betrag

$$\frac{\vec{r_{1,2}}}{r_{1,2}} = \left(\frac{3}{3\sqrt{3}} \middle| \frac{3}{3\sqrt{3}} \middle| \frac{3}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$ Vektor der die Richtung angibt

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-5} C \cdot 5 \cdot 10^{-5} C}{(3\sqrt{3}\ m)^2} = 0{,}499 \ldots N$$

$$\underline{\underline{F \approx 0{,}5 N}}$$



2. Aufgabe:

Es seien $\vec{a} = (1|1|1|0)^T, \vec{b} = (0|1|0|1)^T, \vec{c} = (0|1|1|1)^T, \vec{d} = (0|0|0|\lambda)^T$. Prüfen Sie für welche λ die Vektoren linear unabhängig sind.

Lösung:

Frage: Für welche λ hat die Gleichung:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = 0$$

nur die eine Lösung: $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$?

$$\left.\begin{aligned} &1)\ c_1 \overset{1)}{=} 0 \\ &2)\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \ \overset{3)}{\Rightarrow} \ c_2 = 0 \\ &3)\ c_1 + c_3 = 0 \ \overset{2)}{\Rightarrow} \ c_3 = 0 \\ &4)\ c_2 + c_3 + \lambda c_4 \overset{4)}{=} 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda c_4 = 0 \ \Rightarrow \ c_4 = 0$$

Vektoren sind für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ linear unabhängig.

3. Aufgabe:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (2|-1|2)^T, \vec{b} = (1|b_2|2)^T$.
Für welche Werte b_2 stehen die Vektoren senkrecht und für welche Werte ist der Winkel zwischen den Vektoren größer als 90°?

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander senkrecht, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \ \Rightarrow$
$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \quad \Rightarrow 2 \cdot 1 - b_2 + 2 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow b_2 = 6$
Für $b_2 > 6$ wird das Skalarpodukt negativ $\ \Rightarrow\ $ Winkel $> 90°$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}_{\text{positiv}} \cdot \underbrace{\cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})}_{\text{positiv / negativ}} \qquad \Rightarrow \cos\varphi \text{ für } \varphi > 90° \text{ negativ.}$$

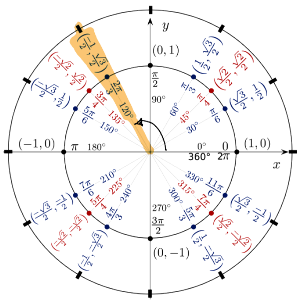
4. Aufgabe:

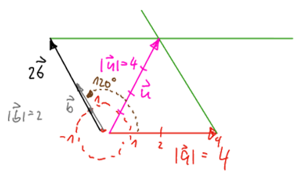
Vektor $\vec{a}$ besitzt die Länge 4, Vektor $\vec{b}$ die Länge 2 und der Winkel zwischen den Vektoren beträgt 120°.
Welche Länge besitzt der Vektor $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$?

Lösung:

NR: $|\vec{b}| = 2$
mit Winkel 120°
(siehe Anhang)

$\vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \end{pmatrix}$





$\vec{u} = \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3} = \sqrt{4 + 12}$

$= \sqrt{16} = 4$

Alternativlösung:

$$\text{Länge } \vec{u} = |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})} = \sqrt{\vec{a}\vec{a} + 2\vec{b}\vec{a} + 2\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}\vec{b}}$$

$$\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 16 \qquad \vec{b}\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 4 \qquad \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(120°) = 4 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

$$\Rightarrow \ |\vec{u}| = \sqrt{16 - 8 - 8 + 16} = \mathbf{4}$$

5. Aufgabe:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie folgende Produkte (Skalar-, Vektor- bzw. Spatprodukte):

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$

c) $\vec{b} \times \vec{c}$

d) $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = [\vec{a}\vec{c}\vec{b}]$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 3 + 5 = \underline{\underline{6}}$

b) $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$

$$(\vec{a} - \vec{c}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = -12 - 24 + 24 = \underline{\underline{-12}}$$

[2. Mögl.: $= \vec{a} \cdot \vec{a} + \cancel{\vec{a} \cdot \vec{c}} - \cancel{\vec{a}\vec{c}} + \vec{c} \cdot \vec{c}$
$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{c}$]

c) $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 5 \\ 4 + 1 \\ -5 - 12 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -17 \end{pmatrix}}}$

d) (Vektorprodukt + skalar multiplizieren)

$$(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 25 \\ 20 - 2 \\ 10 - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 24 + 54 + 6 = \underline{\underline{84}}$$

6. Aufgabe:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix}$N, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}$N, $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$N.

Berechnen Sie die resultierende Kraft $\vec{F}_r$ (Kraftkomponenten, Betrag und Richtungswinkel).

Berechnung der resultierenden Kraft $\vec{F}_r$

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} N$$

$$= \begin{pmatrix} 35 \\ -10 \\ 80 \end{pmatrix} N \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_x = 35 N \\ F_y = -10 N \\ F_z = 80 N \end{array} \right.$$

$$F_r = |\vec{F}_r| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{35^2 + (-10)^2 + 80^2}\, N$$

$$= \sqrt{7725}\, N = \underline{87{,}89\, N}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F_r} = \frac{35 N}{\sqrt{7725}\, N} = 0{,}3982 \Rightarrow \alpha = \arccos(0{,}39..)$$
$$\alpha = \underline{66{,}53°}$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{F_r} = \frac{-10 N}{\sqrt{7725}\, N} = -0{,}1138 \Rightarrow \beta = \arccos(-0{,}11..)$$
$$\beta = \underline{96{,}53°}$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F_r} = \frac{80\, N}{\sqrt{7725}\, N} = 0{,}9102 \Rightarrow \gamma = \arccos(0{,}9102)$$
$$\gamma = \underline{24{,}47°}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_r = 87{,}89 N;\ \alpha = 66{,}53°;\ \beta = 96{,}53°;\ \gamma = 24{,}47°}}$$

7. Aufgabe:

Es seien $\vec{a} = (1|2|-1)^T, \vec{b} = (2|1|1)^T$.
Berechnen Sie die Fläche des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \mathbf{3\sqrt{3}}$$

8. Aufgabe:

Berechnen Sie das Volumen des aufgespannten Spats aus $\vec{a} = (1|1|4)^T, \vec{b} = (1|-2|1)^T$, $\vec{c} = (-3|3|-4)^T$. Bilden die Vektoren ein Links- oder Rechtssystem?

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = -6$$

$\Rightarrow V = |-6| = \mathbf{6} \quad \Rightarrow$ Spatprodukt ist negativ $\Rightarrow$ Linkssystem