Mathematik 1: Übungsblatt - Vektorrechnung 1

1. Aufgabe:

a) $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

b) $|\vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

c) $|\vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Einheitsvektor von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \Rightarrow \vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Aufgabe:

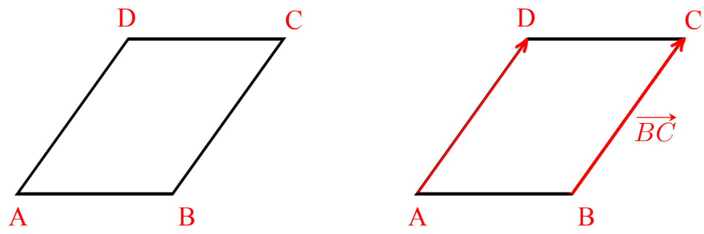
Wie muss eine Koordinate a_3 des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gewählt werden, damit der Vektor die Länge 3 besitzt?

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \Rightarrow 3 = \sqrt{1^2 + 2^2 + a_3^2} \Rightarrow a_3^2 = 4 \Rightarrow \quad a_3 = \pm 2$$

4. Gegeben seien 2 Punkte P_1 und P_2 des 3-dimensionalen Raums. Geben Sie allgemein den Vektor an, der den Punkt P_1 mit P_2 verbindet.

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{2_x} - p_{1_x} \\ p_{2_y} - p_{1_y} \\ p_{2_z} - p_{1_z} \end{pmatrix}$$

5. Gegeben seien 3 Punkte $A(21|-11|43)$, $B(3|7|-8)$ und $C(0|4|5)$ des 3-dimensionalen Raums. Geben Sie den Punkt D so an, dass die Punkte ein Parallelogramm bilden.



$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 4-7 \\ 5-(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 21 \\ -11 \\ 43 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -14 \\ 56 \end{pmatrix} = D$$

6. Aufgabe:

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $\vec{d} = 2\vec{a} - 5\vec{b} + 0.5\vec{c}$

$$\vec{d} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -15 \end{pmatrix}$$

7. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Vektor $\vec{c}$ vom Punkt $A(3|-4|4)$ zu $B(1|-2|5)$ und den Abstand zwischen den beiden Punkten.

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ -2+4 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abstand:

$$d_{\overline{AB}} = |\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1} = 3$$