Mathematik 1 - Probeklausur 3

1. Aufgabe:

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$?

Lösung:

		gilt	gilt nicht
a)	$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$		X
b)	$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} \cdot \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d})$		X
c)	$\vec{a} \cdot ((\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{d}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$		X
d)	$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$		X
e)	Aus $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $\vec{a} \perp \vec{c}$ folgt $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$	X	
f)	Aus $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $\vec{a} \perp \vec{c}$ folgt $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{0}$		X
g)	Aus $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $\vec{a} \perp \vec{c}$ folgt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{0}$	X	

7 Punkte

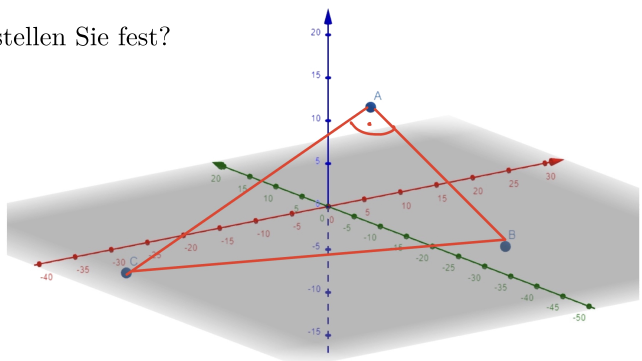
2. Aufgabe:

Berechnen Sie die Längen der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 - 12\sqrt{3} \\ 4 + 3\sqrt{3} \\ -12 + 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

und die Winkel zwischen diesen Vektoren! Was stellen Sie fest?

Lösung:



$$\|\vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13,$$

$$\|\vec{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{144+9+16} = 13\sqrt{3},$$

$$\|\vec{c}\| = \left\| \begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+ 3\sqrt{3} \\ -12+ 4\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9+72\sqrt{3}+144\cdot 3+16+24\sqrt{3}+9\cdot 3+144-96\sqrt{3}+16\cdot 3} = \sqrt{169\cdot 4} = 13\cdot 2 = 26$$

$$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos\frac{\begin{pmatrix}3\\-4\\12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\sqrt{3}\\-3\sqrt{3}\\-4\sqrt{3}\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}3\\-4\\12\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}12\sqrt{3}\\-3\sqrt{3}\\-4\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\|} = \arccos 0 = 90^\circ \quad \text{(Skalarprodukt 0} \iff \text{orthogonal),}$$

$$\sphericalangle(\vec{b},\vec{c}) = \arccos\frac{\begin{pmatrix}12\sqrt{3}\\-3\sqrt{3}\\-4\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3-12\sqrt{3}\\4+\ 3\sqrt{3}\\-12+\ 4\sqrt{3}\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}12\sqrt{3}\\-3\sqrt{3}\\-4\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}-3-12\sqrt{3}\\4+\ 3\sqrt{3}\\-12+\ 4\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\|} = \arccos\frac{-169\cdot 3}{13\sqrt{3}\cdot 26} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150^\circ,$$

$$\sphericalangle(\vec{c},\vec{a}) = \arccos\frac{\begin{pmatrix}-3-12\sqrt{3}\\4+\ 3\sqrt{3}\\-12+\ 4\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-4\\12\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-3-12\sqrt{3}\\4+\ 3\sqrt{3}\\-12+\ 4\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}3\\-4\\12\end{pmatrix}\right\|} = \arccos\frac{-169}{26\cdot 13} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

Offensichtlich gilt $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Also bilden die drei gegebenen Vektoren ein Dreieck. Dieses ist rechtwinklig. Die berechneten Winkel sind seine Außenwinkel, ihre Summe ist 360°.

10 Punkte

3. Aufgabe:

Gegeben sind die Vektoren

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}$.

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie die Vektoren auf Unabhängigkeit und berechnen Sie den kleinsten Untervektorraum (Menge der linear unabhängigen Vektoren bzw. lineare Hülle).

Lösung:

a) $(-1,2,1) = -\frac{1}{2}(2,-4,-2) \quad \Rightarrow$ die Vektoren sind linear abhängig: Sie liegen auf einer Geraden G, bzw. $\vec{0} = (-1,2,1) + \frac{1}{2}(2,-4,-2)$ ist eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.
$L(\vec{a},\vec{b}) = L(\vec{a}) = L(\vec{b}) = G$ mit $G : \vec{x} = \mu(-1,2,1)$.

b) Die Vektorgleichung $x(1,1,-1)+y(-2,0,1)+z(2,1,-3) = (0,0,0)$ ergibt folgendes LGS:

x	y	z		
1	−2	2	0	1
1	0	1	0	
−1	$\boxed{1}$	−3	0	2
$\boxed{1}$	0	1	0	1
−1	0	−4	0	1
0	0	$\boxed{-3}$	0	

$\Longrightarrow$

$z = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Das LGS ist nur trivial lösbar.

Der Nullvektor läßt sich nur trivial aus den drei Vektoren kombinieren.

Die drei Vektoren sind linear unabhängig!

Die drei Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

$L(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \mathbb{R}^3$.

10 Punkte

4. Aufgabe:

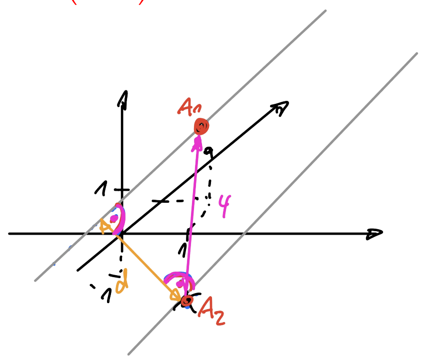
Bestimmen Sie den Abstand der Geraden

$$G_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } G_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Obwohl die beiden Geraden parallel sind, wird nicht nach dem Abstand der beiden Aufpunkte gesucht ($d' = 4$), sondern das d nut dem geringsten Abstand. Also dem Abstand bei dem die Verbindung senkrecht auf beiden Geraden steht!

$$d = d(G_1, G_2) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{11}} = 4\sqrt{\frac{2}{11}} \approx 1.706$$



8 Punkte

5. Aufgabe:

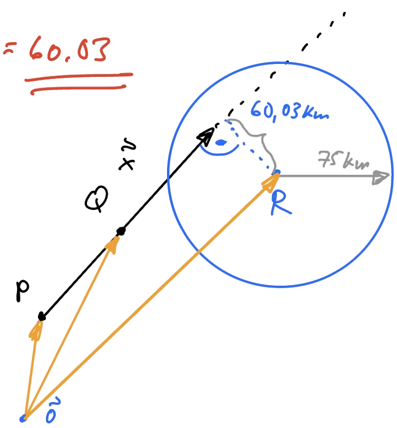
Ein Flugzeug wird erst am Ort $P(5|4|3)$ und kurze Zeit später am Ort $Q(2|8|3)$ gesichtet (Angaben in km). Im Punkt $R(8|100|1)$ befindet sich eine Radarstation mit einer Reichweite von 75 km.
Wird das Flugzeug vom Radar erfasst, wenn es geradlinig weiterfliegt?

Lösung:

Das Flugzeug wird vom Radar erfasst:

$$d = \frac{\left| (\vec{R} - \vec{P}) \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 100 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9+16}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 96 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 300 \end{pmatrix} \right|}{5} = \frac{\sqrt{64 + 36 + 300^2}}{5} \approx \frac{300{,}17}{5} \approx \underline{\underline{60{,}03}}$$



10 Punkte

6. Aufgabe:

Erkennen Sie, warum folgende Determinanten verschwinden?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & -10 \\ 6 & -12 & 30 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -8 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & -6 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -20 & 15 & -20 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Lösung:

a) Alle Elemente der 3.Spalte =0

b) Die Determinante enthält zwei proportionale Spalten (3. ist das 5fache der 1.Spalte)

c) Die 4.Zeile ist die Summe der ersten beiden Zeilen (Linearkombination)

d) Die Determinante enthält zwei gleiche Spalten (1. und 3.)

8 Punkte

7. Aufgabe:

Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt das inhomogene LGS genau eine Lösung?

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Das inhomogene LGS $\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ besitzt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn gilt Det $\boldsymbol{A} \neq 0$.
Die 3-reihige Determinante lässt sich mit der Regel von SARRUS berechnen:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{A}} \begin{matrix} -1 & \lambda \\ 0 & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{matrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -6 - 2\lambda + 0 + 4 - (1-\lambda) - 0 = -2 - 2\lambda - 1 + \lambda = -3 - \lambda$$

Aus der Bedingung
Det $\boldsymbol{A} = -3 - \lambda \neq 0$
folgt nun
$\lambda \neq -3$, d.h. das LGS besitzt genau eine Lösung, wenn der Parameter λ von -3 verschieden ist!

8 Punkte

8. Aufgabe:

A sei eine beliebige Matrix.
Mit welcher Matrix B muss man die Matrix A von rechts multiplizieren (d.h. AB berechnen), damit

a) nur die 1. Spalte verdoppelt wird, alle anderen bleiben unverändert,

b) eine einspaltige Matrix entsteht, deren Komponenten die Summen der Zeilen der Matrix A sind,

c) von der 2. Spalte das Dreifache der 1. Spalte abgezogen wird (alle anderen Werte bleiben erhalten)?

d) Wie müsste die Aufgabenstellung geändert werden, um die gleichen Effekte für Zeilen zu erreichen?

Lösung:

a) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ 2a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

$2 *$ Element aus 1. Spalte

b) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

$1 *$ Element jeder Spalte und addieren

c) $$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

$-3 *$ Element aus 1. Spalte $+ 1 *$ Element aus 2. Spalte

d) Um die entsprechenden Effekte für die Zeilen auszulösen, müsste die Multiplikation von links erfolgen. Wegen $(\boldsymbol{AB})^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ wäre dabei jeweils die transponierte zu der oben angegebenen Matrix zu verwenden.

11 Punkte

9. Aufgabe:

2 Abbildungsmatrizen und eine Bildpunktematrix sind gegeben.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

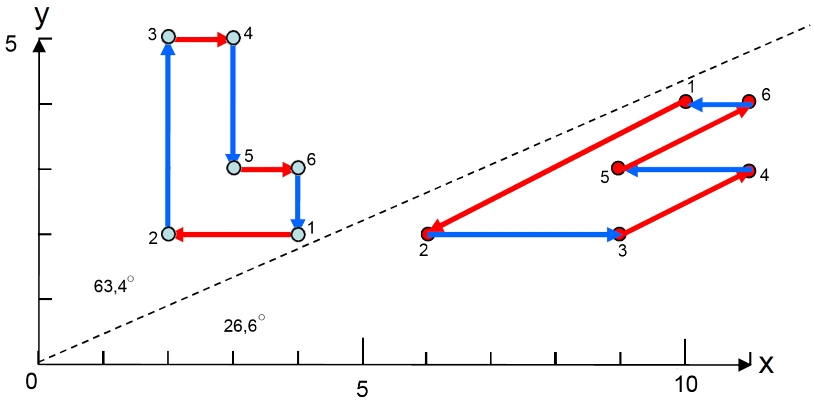
a) Berechnen Sie die neuen Bildpunkte für $A_1B + A_2B$

b) Was ist mit der Figur passiert?

Lösung:

a) Distributivgesetz: $A_1B + A_2B = (A_1 + A_2)B$

$$\Rightarrow \quad (A_1{+}A_2)\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 9 & 11 & 9 & 11 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



b) gedreht, gespiegelt und gestreckt

10 Punkte

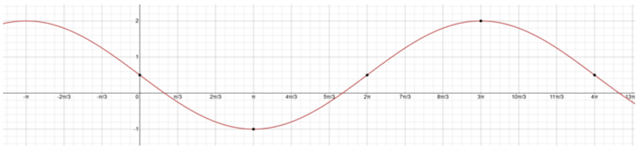
10. Aufgabe:

Ordnen Sie folgenden trigonometrischen Funktionen ihren Schaubildern zu:

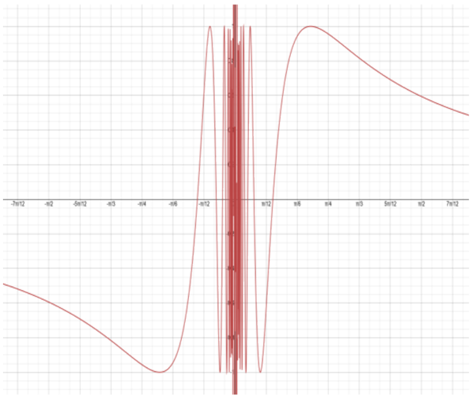
(A) $y = \sin(2x) + \frac{3}{2}\cos(x)$ (B) $y = -1.5\sin(\frac{1}{2}x) + 0.5$

(C) $y = \frac{3}{2}\cos(x)$ (D) $y = \sin(\frac{1}{x})$

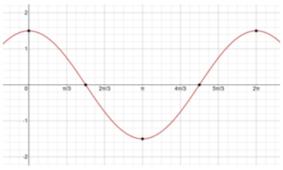
Lösung:



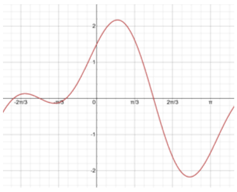
B



D



C



A

8 Punkte

Summe **90 Punkte**