Mathematik 1 - Probeklausur 3

1. Aufgabe:

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$?

		gilt	gilt nicht
a)	$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \;=\; (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$		
b)	$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} \cdot \vec{d}) \;=\; (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d})$		
c)	$\vec{a} \cdot ((\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{d}) \;=\; (\vec{a} \cdot \vec{d}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$		
d)	$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \;=\; \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$		
e)	Aus $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $\vec{a} \perp \vec{c}$ folgt $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$		
f)	Aus $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $\vec{a} \perp \vec{c}$ folgt $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{0}$		
g)	Aus $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $\vec{a} \perp \vec{c}$ folgt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{0}$		

7 Punkte

2. Aufgabe:

Berechnen Sie die Längen der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 - 12\sqrt{3} \\ 4 + 3\sqrt{3} \\ -12 + 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

und die Winkel zwischen diesen Vektoren! Was stellen Sie fest?

10 Punkte

3. Aufgabe:

Gegeben sind die Vektoren

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$

Untersuchen Sie die Vektoren auf Unabhängigkeit und berechnen Sie den kleinsten Untervektorraum (Menge der linear unabhängigen Vektoren bzw. lineare Hülle).

10 Punkte

4. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Abstand der Geraden

$$G_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } G_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

8 Punkte

5. Aufgabe:

Ein Flugzeug wird erst am Ort $P(5|4|3)$ und kurze Zeit später am Ort $Q(2|8|3)$ gesichtet (Angaben in km). Im Punkt $R(8|100|1)$ befindet sich eine Radarstation mit einer Reichweite von 75 km.
Wird das Flugzeug vom Radar erfasst, wenn es geradlinig weiterfliegt?

10 Punkte

6. Aufgabe:

Erkennen Sie, warum folgende Determinanten verschwinden?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & -10 \\ 6 & -12 & 30 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -8 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & -6 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -20 & 15 & -20 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

8 Punkte

7. Aufgabe:

Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt das inhomogene LGS genau eine Lösung?

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8 Punkte

8. Aufgabe:

A sei eine beliebige Matrix.
Mit welcher Matrix B muss man die Matrix A von rechts multiplizieren (d.h. AB berechnen), damit

a) nur die 1. Spalte verdoppelt wird, alle anderen bleiben unverändert,

b) eine einspaltige Matrix entsteht, deren Komponenten die Summen der Zeilen der Matrix A sind,

c) von der 2. Spalte das Dreifache der 1. Spalte abgezogen wird (alle anderen Werte bleiben erhalten)?

d) Wie müsste die Aufgabenstellung geändert werden, um die gleichen Effekte für Zeilen zu erreichen?

11 Punkte

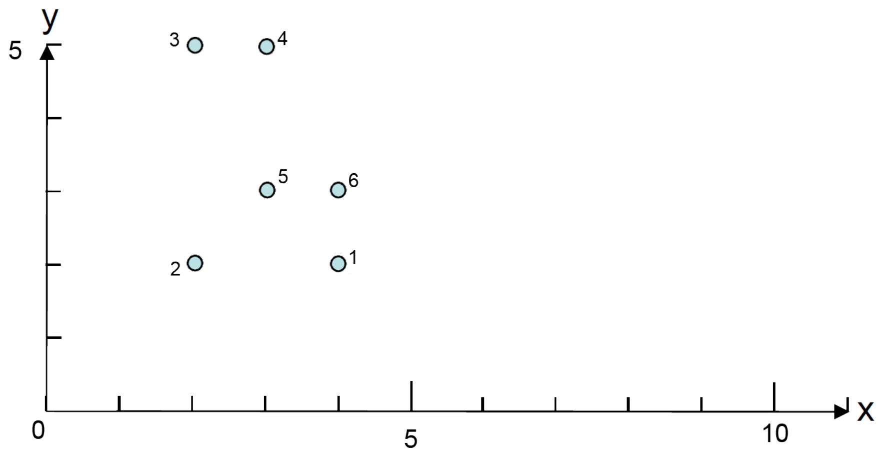
9. Aufgabe:

2 Abbildungsmatrizen und eine Bildpunktematrix sind gegeben.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die neuen Bildpunkte für $A_1B + A_2B$

b) Was ist mit der Figur passiert?



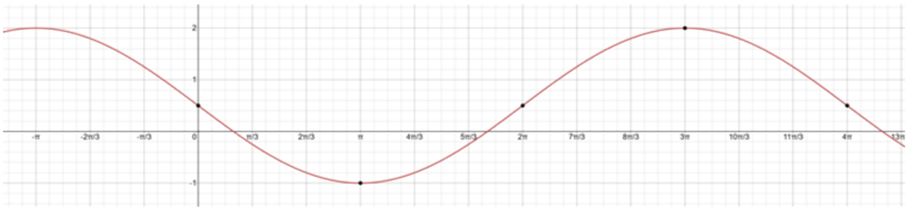
10 Punkte

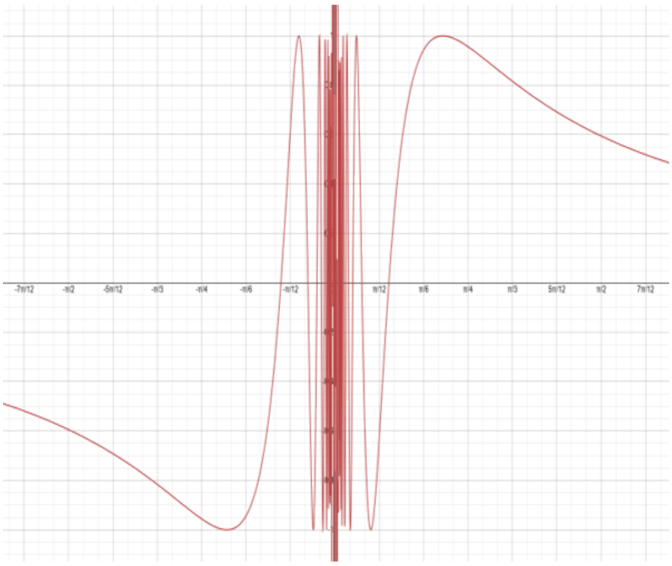
10. Aufgabe:

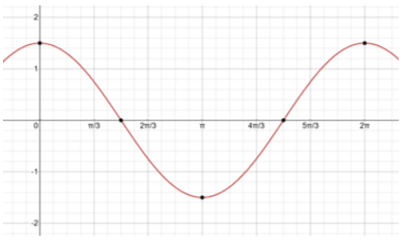
Ordnen Sie folgenden trigonometrischen Funktionen ihren Schaubildern zu:

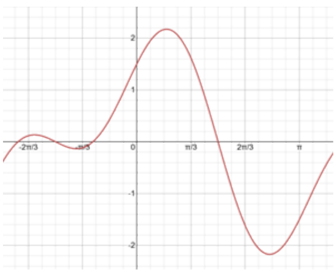
(A) $y = \sin(2x) + \frac{3}{2}\cos(x)$ (B) $y = -1.5\sin(\frac{1}{2}x) + 0.5$

(C) $y = \frac{3}{2}\cos(x)$ (D) $y = \sin(\frac{1}{x})$









8 Punkte

Summe **90 Punkte**