Mathematik 1 - Probeklausur 2

1. Aufgabe:

Ermitteln Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wenn es einen Schnittpunkt gibt, so gilt in diesem $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcll} 4 + t &=& 3u & | \cdot (-2) \\ -1 - 2t &=& u & | + \\ 8 + 2t &=& 6u & | + \\ 7 &=& 7u & u = 1,\ t = 3u - 4 = -1 \end{array}$$

$4 + 3t = 6 - 5u$ ist für $t = -1,\ u = 1$ erfüllt.

Da das Gleichungssystem lösbar ist, gibt es einen Schnittpunkt, dieser ist

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schnittwinkel ist

$$\arccos \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\|} = \arccos \frac{-14}{\sqrt{14}\sqrt{35}} = \arccos\left(-\sqrt{\frac{14}{35}}\right) = \arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \approx 129{,}23°.$$

Auch die Angabe des Supplementwinkels von ca. $50{,}77°$ ist richtig. Er ergibt sich, wenn man bei einer der Geraden den Richtungsvektor in die entgegengesetzte Richtung verwendet.

10 Punkte

2. Aufgabe:

Geben Sie an, für welche Werte des Parameters a das Lineare Gleichungssystem eine eindeutige, unendlich viele oder keine Lösung besitzt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |1 \\ -a & 1 & 2 & |2 \\ -2 & 2 & a & |3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1+a & 2+a & |2+a \\ 0 & 4 & a+2 & | & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1+a & 2+a & |2+a \\ 0 & 3-a & 0 & |3-a \end{pmatrix}$$

Für a = 3 hat dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Für a = -2 gibt es keine Lösung, da in der zweiten Zeile $-x_2 = 0$ steht und in der dritten Zeile aber $5x_2 = 5$. Dadurch entsteht ein Widerspruch, weshalb a= -2 zu keiner Lösung führt. Für alle anderen Werte außer a = (-2;3) besitzt das Geleichungssystem eine eindeutige Lösung.

10 Punkte

3. Aufgabe:

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrix:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -5 \\ -1 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8 = -(\lambda+2)^3$$

ebenfalls dreifacher Eigenwert $\lambda = -2$

lineares Gleichungssystem für die Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Gauß}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rang ist 2 (zwei relevante Gleichungen) $\rightsquigarrow$ geometrische Vielfachheit 1

eindimensionaler Eigenraum zu dem Eigenvektor

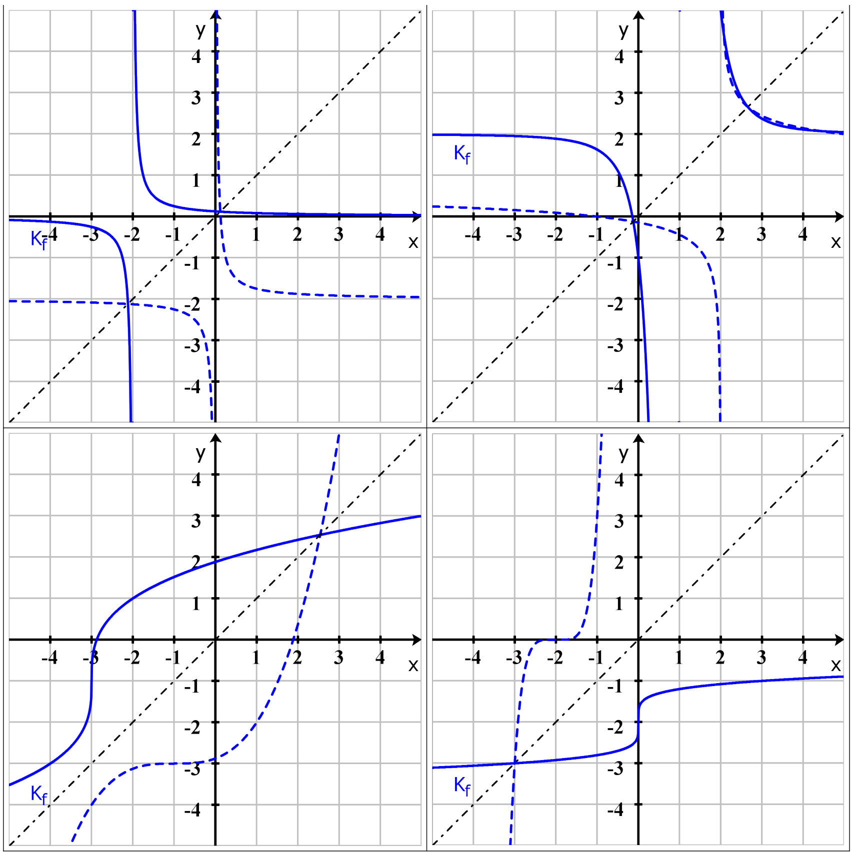
$$u = (2,1,1)^t$$

8 Punkte

4. Aufgabe:

Zeichnen Sie mit Hilfe der Schaubilder die Graphen der Umkehrfunktionen:

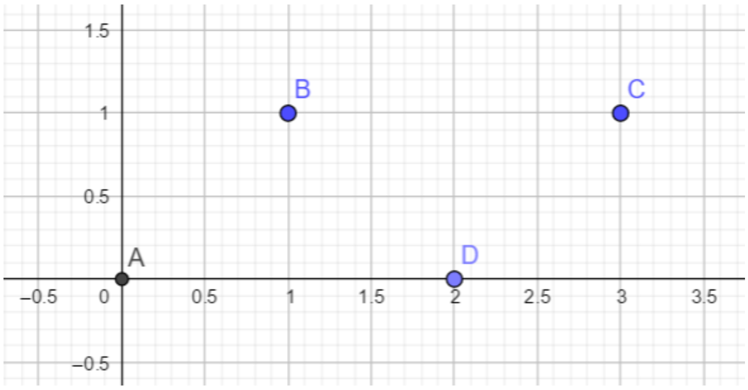
Lösung:



8 Punkte

5. Aufgabe:

Drehen Sie das gegebene Parallelogramm um den Punkt A um 30° und geben Sie die neuen Punkte an.



Lösung:

$D = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

A'$= (0, 0)$

B'$= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

C'$= \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$

D'$= \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

A'$= (0, 0)$

B'$= (0.37, 1.37)$

C'$= (2.1, 2.37)$

D'$= (1.73, 1)$

10 Punkte

6. Aufgabe:

Bilden Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion:

$$f(x) = 2\left(e^{\frac{x}{3}-4} - 4\right)^3 - 1$$

Lösung:

$$f^{-1}(x) = 12 + 3\ln\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} + 4\right)$$

4 Punkte

7. Aufgabe:

Berechnen Sie die Grenzwerte der Funktion:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$

Lösung:

a) 2

b) Beide Funktionen haben keinen Grenzwert für $x \to \infty$, deswegen kein Grenzwert bzw. konvergiert nicht.

4 Punkte

8. Aufgabe:

Zeichnen Sie mit Hilfe einer Wertetabelle den Graphen zu folgender Funktionsgleichung; bestimmen Sie die waagrechte und senkrechte Asymptote rechnerisch.

$$y = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2}$$

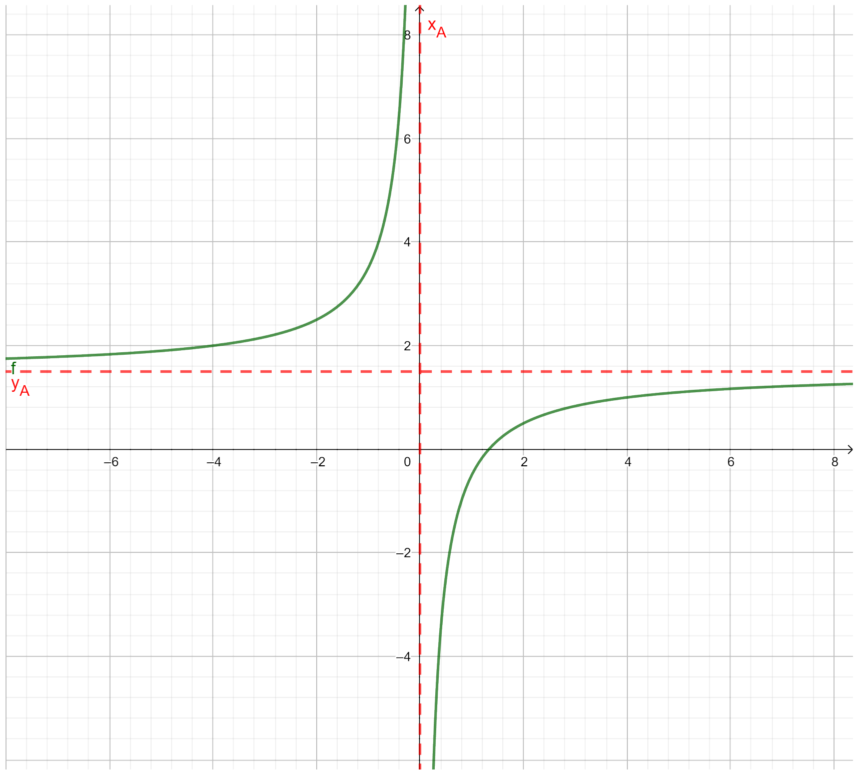
Lösung:

- **Senkrechte Asymptote:**
  Auf einen Nenner bringen und gleich 0 setzen um die Definitionslücke herauszufinden.
  $f(x) = \dfrac{-4+3x}{2x} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 0}.$
  Die Funktion hat eine senkrechte Asymptote bei $x = 0$.

- **Waagrechte Asymptote:**
  Betrachten der Funktions-Grenzwerte gegen $+\infty$ und $-\infty$.
  $\lim\limits_{x \to \infty} -\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$
  Die Funktion hat also eine waagrechte Asymptote bei $\boldsymbol{y = \frac{3}{2}}$.

- **Wertetabelle:**

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
$f(x)$	2	$\frac{10}{6}$	1.5	3.5	- 0.5	0.5	$\frac{2}{10}$	1



10 Punkte

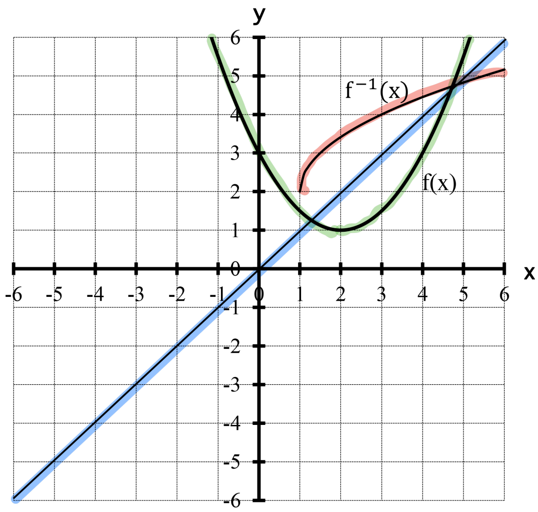
9. Aufgabe:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 1$

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

b) Untersuchen Sie $f(x)$ und $f^{-1}(x)$ auf Definitions- sowie Wertebereich und zeichnen Sie beide Funktionen in das gemeinsames Koordinatensystem.

Lösung:



Gleichung	$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$	$f^{-1}(x) = \sqrt{2(x-1)} + 2$
D =	$\mathbb{R}$	$[1; \infty[$
W =	$[1; \infty[$	$[2; \infty[$

10 Punkte

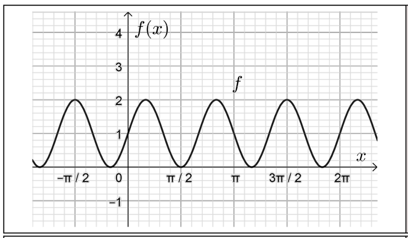
10. Aufgabe:

Die Auswirkung einer Veränderung des Parameters b auf den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sin(bx) + d$ soll untersucht werden.

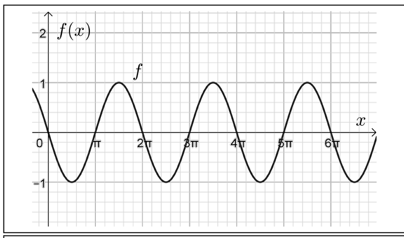
Ordnen Sie richtig zu:

Lösung:

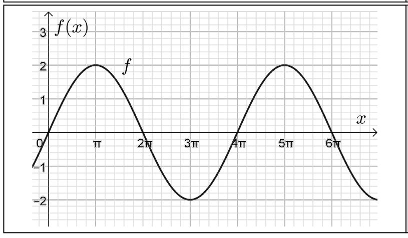
A	$b = -1$	B	$b = 0{,}5$	C	$b = 4$	D	$b = 3$



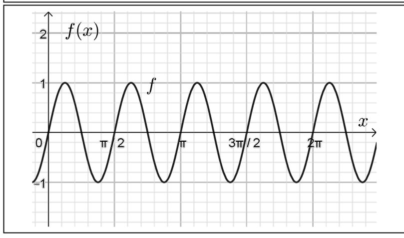
D



A



B



C

4 Punkte

11. Aufgabe:

Ermittlen Sie mithilfe der gegebenen Gleichungen eine Nullstelle der jeweils zugehörigen Funktion:

a) $f(x) = 20{\cdot}\sin(4x + 1)$

b) $h(t) = \sin(3\pi x - \pi)$

Lösung:

a) $x_0 = -\dfrac{1}{4}$

b) $x_0 = \dfrac{1}{3}$

4 Punkte

12. Aufgabe:

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen und geben Sie die Zahl in der Form: $z = a + ib$ an:

a) $z_1 = \dfrac{1}{i}$

b) $z_2 = \dfrac{1}{1 - i\sqrt{3}}$

c) $z_3 = \dfrac{(-2+5i)\cdot(1+3i)}{2+3i} - \left(\dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i\right)$

Lösung:
Um einen Bruch in Real- und Imaginärteil zu trennen, erweitert man den Bruch um das konjungiert Komplexe des Nenners.

a) $z_1 = \dfrac{1}{i} = \dfrac{-i}{i\cdot(-i)} = \dfrac{-i}{-i^2} = \dfrac{-i}{1} = \boldsymbol{-i}$

b) $z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

c) $z_3 = \ \dots\ = \ \boldsymbol{-3 + 4i}$

8 Punkte

Summe	**90 Punkte**