

Mathematik 1 - Probeklausur Mathe Booster (80 Min.)

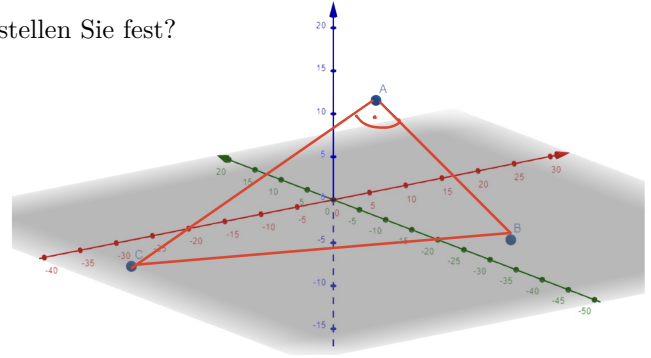
1. Aufgabe:

Berechnen Sie die Längen der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+3\sqrt{3} \\ -12+4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

und die Winkel zwischen diesen Vektoren! Was stellen Sie fest?

Lösung:



$$\|\vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13,$$

$$\|\vec{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{144+9+16} = 13\sqrt{3},$$

$$\|\vec{c}\| = \left\| \begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+3\sqrt{3} \\ -12+4\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9+72\sqrt{3}+144\cdot 3+16+24\sqrt{3}+9\cdot 3+144-96\sqrt{3}+16\cdot 3} = \sqrt{169\cdot 4} = 13\cdot 2 = 26$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\|}} = \arccos 0 = 90^\circ \quad (\text{Skalarprodukt } 0 \iff \text{orthogonal}),$$

$$\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+3\sqrt{3} \\ -12+4\sqrt{3} \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+3\sqrt{3} \\ -12+4\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\|}} = \arccos \frac{-169 \cdot 3}{13\sqrt{3} \cdot 26} = \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 150^\circ,$$

$$\sphericalangle(\vec{c}, \vec{a}) = \arccos \frac{\begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+3\sqrt{3} \\ -12+4\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+3\sqrt{3} \\ -12+4\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \right\|}} = \arccos \frac{-169}{26 \cdot 13} = \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = 120^\circ$$

Offensichtlich gilt $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Also bilden die drei gegebenen Vektoren ein Dreieck. Dieses ist rechtwinklig. Die berechneten Winkel sind seine Außenwinkel, ihre Summe ist 360° .

10 Punkte

2. Aufgabe:

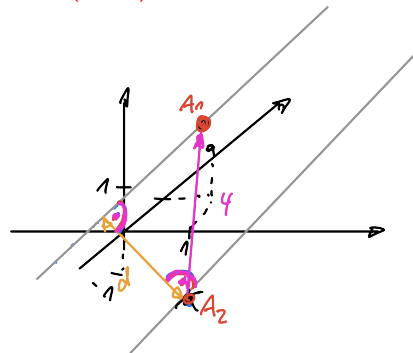
Bestimmen Sie den Abstand der Geraden

$$G_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Obwohl die beiden Geraden parallel sind, wird nicht nach dem Abstand der beiden Aufpunkte gesucht ($d' = 4$), sondern das d mit dem geringsten Abstand. Also dem Abstand bei dem die Verbindung senkrecht auf beiden Geraden steht!

$$d = d(G_1, G_2) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{11}} = 4\sqrt{\frac{2}{11}} \approx 1.706$$



8 Punkte

3. Aufgabe:

Ein Flugzeug wird erst am Ort $P(5|4|3)$ und kurze Zeit später am Ort $Q(2|8|3)$ gesichtet (Angaben in km). Im Punkt $R(8|100|1)$ befindet sich eine Radarstation mit einer Reichweite von 75 km.

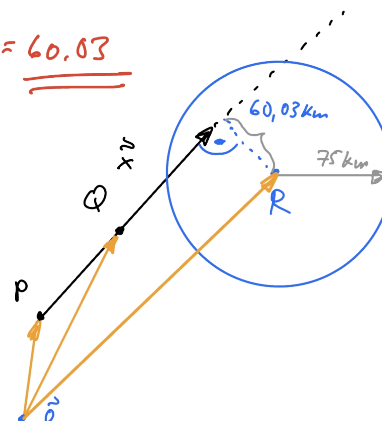
Wird das Flugzeug vom Radar erfasst, wenn es geradlinig weiterfliegt?

Lösung:

Das Flugzeug wird vom Radar erfasst:

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} \vec{R} - \vec{P} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{bmatrix} 8 \\ 100 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right| \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9+16}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 96 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 300 \end{pmatrix} \right|}{5} = \frac{\sqrt{64+36+300^2}}{5} \approx \frac{300,77}{5} \approx \underline{\underline{60,03}}$$



10 Punkte

4. Aufgabe:

Erkennen Sie, warum folgende Determinanten verschwinden?

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & -10 \\ 6 & -12 & 30 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -8 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & -6 & 0 \end{vmatrix} \\ \\ \text{d) } \begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -20 & 15 & -20 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \end{array}$$

Lösung:

- a) Alle Elemente der 3. Spalte = 0
- b) Die Determinante enthält zwei proportionale Spalten (3. ist das 5fache der 1. Spalte)
- c) Die 4. Zeile ist die Summe der ersten beiden Zeilen (Linearkombination)
- d) Die Determinante enthält zwei gleiche Spalten (1. und 3.)

8 Punkte

5. Aufgabe:

Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt das inhomogene LGS genau eine Lösung?

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Das inhomogene LGS $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ besitzt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn gilt $\det \mathbf{A} \neq 0$. Die 3-reihige Determinante lässt sich mit der Regel von SARRUS berechnen:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{A}} = \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -6 - 2\lambda + 0 + 4 - (1 - \lambda) - 0 = -2 - 2\lambda - 1 + \lambda = -3 - \lambda$$

Aus der Bedingung

$$\det \mathbf{A} = -3 - \lambda \neq 0$$

folgt nun

$\lambda \neq -3$, d.h. das LGS besitzt genau eine Lösung, wenn der Parameter λ von -3 verschieden ist!

8 Punkte

6. Aufgabe:

A sei eine beliebige Matrix.

Mit welcher Matrix B muss man die Matrix A von rechts multiplizieren (d.h. AB berechnen), damit

- nur die 1. Spalte verdoppelt wird, alle anderen bleiben unverändert,
- eine einspaltige Matrix entsteht, deren Komponenten die Summen der Zeilen der Matrix A sind,
- von der 2. Spalte das Dreifache der 1. Spalte abgezogen wird (alle anderen Werte bleiben erhalten)?
- Wie müsste die Aufgabenstellung geändert werden, um die gleichen Effekte für Zeilen zu erreichen?

Lösung:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

↑
2 * Element aus 1. Spalte

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

↑
1 * Element jeder Spalte und addieren

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

↑
- 3 * Element aus 1. Spalte + 1 * Element aus 2. Spalte

- d) Um die entsprechenden Effekte für die Zeilen auszulösen, müsste die Multiplikation von links erfolgen. Wegen $(AB)^T = B^T A^T$ wäre dabei jeweils die transponierte zu der oben angegebenen Matrix zu verwenden.

10 Punkte

7. Aufgabe:

2 Abbildungsmatrizen und eine Bildpunktematrix sind gegeben.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

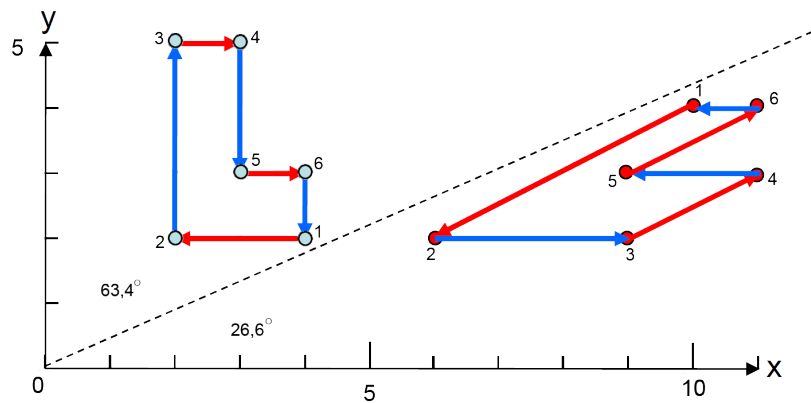
a) Berechnen Sie die neuen Bildpunkte für $A_1B + A_2B$

b) Was ist mit der Figur passiert?

Lösung:

a) Distributivgesetz: $A_1B + A_2B = (A_1 + A_2)B$

$$\Rightarrow (A_1 + A_2) \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 9 & 11 & 9 & 11 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



b) gedreht, gespiegelt und gestreckt

8 Punkte

8. Aufgabe:

Ordnen Sie folgenden trigonometrischen Funktionen ihren Schaubildern zu:

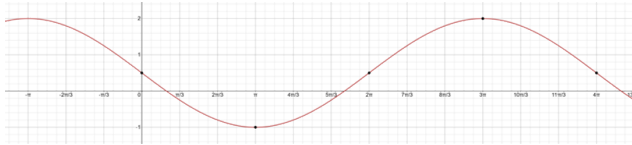
(A) $y = \sin(2x) + \frac{3}{2}\cos(x)$

(B) $y = -1.5\sin(\frac{1}{2}x) + 0.5$

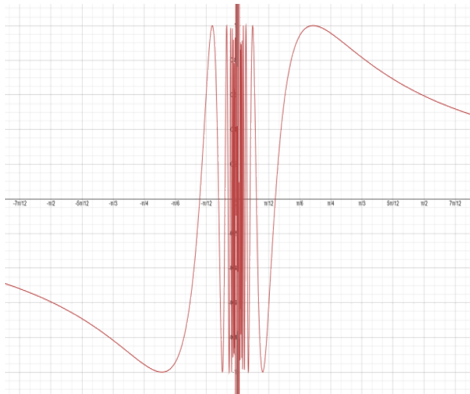
(C) $y = \frac{3}{2}\cos(x)$

(D) $y = \sin(\frac{1}{x})$

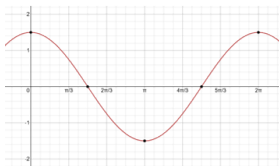
Lösung:



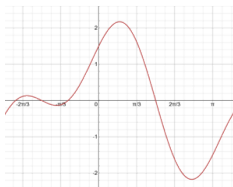
B



D



C



A

8 Punkte

9. Aufgabe:

Gegeben sind die komplexen Zahlen:

$$z_1 = 5 + 7i, \quad z_2 = 4 - 2i$$

Berechnen Sie

- a) $z_1 + z_2$
- b) $z_1 - z_2$
- c) $z_1 \cdot z_2$
- d) $\frac{z_1}{z_2}$
- e) Skizzieren Sie die Zeiger der komplexen und der konjugiert komplexen Zahlen in ein Koordinatensystem.

Lösung:

a) Addition

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 5 + 7i + 4 - 2i \\ &= 5 + 4 + 7i - 2i && \text{Kommutativgesetz} \\ &= 9 + 5i && \text{Zusammenfassen} \end{aligned}$$

b) Subtraktion

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= 5 + 7i - (4 - 2i) \\ &= 5 - 4 + 7i + 2i && \text{Minuskammer auflösen u.} \\ &= 1 + 9i && \text{Zusammenfassen} \end{aligned}$$

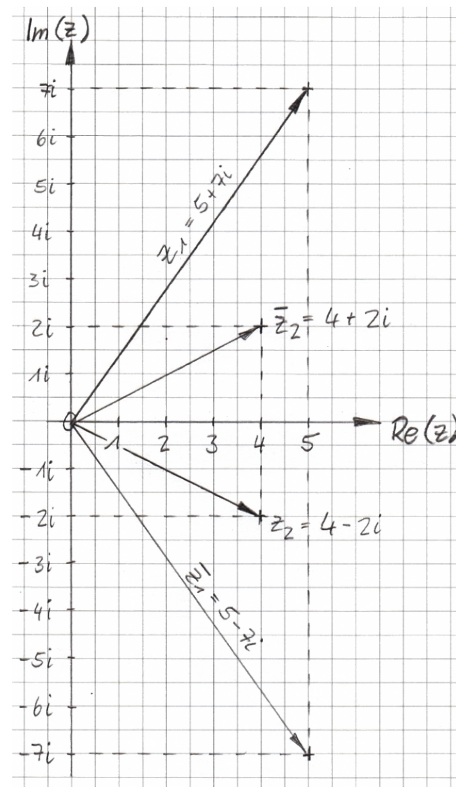
c) Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (5 + 7i) \cdot (4 - 2i) && \text{Ausmultiplizieren nach} \\ &= 20 - 10i + 28i - 14i^2 && \text{Distributivgesetz} \\ &= 20 + 14 + 18i && \text{Zusammenfassen u.} \\ &= 34 + 18i && i^2 = -1 \text{ setzen!} \end{aligned}$$

d) Division

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{5 + 7i}{4 - 2i} = \frac{(5 + 7i) \cdot (4 + 2i)}{(4 - 2i) \cdot (4 + 2i)} && \text{Reellmachen des Nenners} \\ &= \frac{20 + 10i + 28i + 14i^2}{16 + 4} && \text{Ausmultipl. u.} \\ &= \frac{6 + 38i}{20} && \text{Zusammenfassen} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{19}{10}i \end{aligned}$$

e)



10 Punkte

Summe

80 Punkte