

Elektrotechnik: Zusatzaufgaben 8 - Komplexe Wechselstromrechnung

1. Aufgabe:

Wie groß ist der Strom I in einer Induktivität mit $L = 10 \text{ H}$, die an eine Wechselspannung von $U = 12 \text{ V}$ mit einer Frequenz von $f = 50 \text{ Hz}$ angeschlossen ist?

Wie groß ist der Komplexe Strom $\underline{I}$, wenn die Spannung $\underline{U}$ als reelle Spannung vorausgesetzt ist?

Lösung:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} = 314 \text{ s}^{-1}$$

$$X_L = \omega L = 314 \text{ s}^{-1} \cdot 10 \text{ H} = 3,14 \text{ k}\Omega$$

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{12 \text{ V}}{3,14 \text{ k}\Omega} = 3,82 \text{ mA}$$

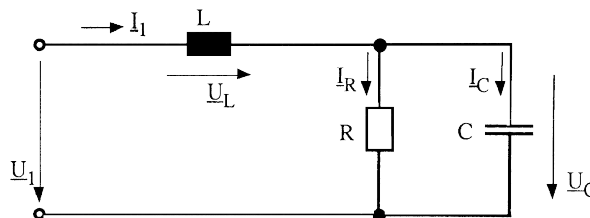
$$\underline{I} = -jI = -j3,82 \text{ mA}$$

2. Aufgabe:

Gegeben ist folgende Schaltung mit dem Widerstand $R = 1 \text{ k}\Omega$, einer verlustfreien Spule mit der Induktivität $L = 1 \text{ mH}$ und einem verlustfreien Kondensator mit der Kapazität $C = 1 \text{ nF}$. Ströme und Spannungen in der Schaltung sind sinusförmig mit der Kreisfrequenz $\omega = 10^6 \frac{1}{\text{s}}$.

Die komplexen Spannungen der Schaltung sind $\underline{U}_1 = \hat{U}_1 \cdot e^{j\varphi_{U_1}}$, $\underline{U}_L = \hat{U}_L \cdot e^{j\varphi_{U_L}}$, und $\underline{U}_C = 1 \text{ V}$

- Bestimmen Sie den Momentanwert $i_1(t)$ des Stroms durch die Spule allgemein als Funktion von $\underline{I}_1$.
- Bestimmen Sie $\hat{U}_1$ und φ_1 .
- Konstruieren Sie das Zeigerdiagramm für die Spannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_C$ sowie für die Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_R$ und $\underline{I}_C$.
Zeichnen Sie alle 6 Zeiger in dasselbe Bild und verwenden Sie für die Spannungszeiger eine andere Farbe als für die Stromzeiger.
Maßstab: $1 \text{ V} = 5 \text{ cm}$, $1 \text{ mA} = 4 \text{ cm}$.
- Bestimmen Sie den Realteil und den Imaginärteil der Impedanz $\underline{Z}_1 = \underline{U}_1 / \underline{I}_1$ der Schaltung.



Lösung:

Warum Komplexe Zeiger in der Elektrotechnik?

Vereinfachung der Rechenoperationen durch
Transformieren von der Zeit-Ebene (Originalfunktion)
in die Frequenz-Ebene (Bildfunktion).

$$R \quad \underline{z}_R = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} \cdot e^{j \cdot 0} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = R$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{NR: } j\omega t \\ \frac{\hat{u} \cdot e^{j\omega t}}{\hat{i} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} \cdot e^{j \cdot 0} \end{array} \right]$$

$$L \quad \boxed{u = L \cdot \frac{di}{dt}} \quad \Rightarrow \quad u = L \cdot \frac{d}{dt} \hat{i} e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

Einsetzen von
komplexen $\hat{i}$

$$\underline{u} = L \cdot \hat{i} \cdot j\omega e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$$\underline{u} = j\omega L \cdot \underline{i} \quad \Rightarrow \quad \underline{z}_L = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = j\omega L$$

$$\Rightarrow \underline{z}_L = \omega L \quad \text{und mit Phasenwinkel } \varphi_L = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$

$$C \quad \frac{1}{\text{---}}$$

$$C = \frac{Q}{u}$$

$$\Rightarrow u = \frac{Q}{C}$$

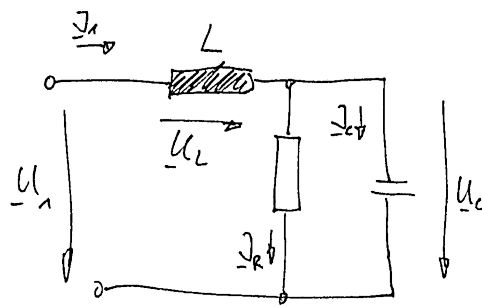
$$\boxed{u = \frac{1}{C} \cdot \int i dt}$$

$$\Rightarrow \underline{u} = \frac{1}{C} \int \underline{i} dt = \frac{1}{C} \int \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} dt = \frac{1}{j\omega C} \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$$= \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{i} \quad \Rightarrow \quad \underline{z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

$$\Rightarrow \underline{z}_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{mit } \varphi_C = -\frac{\pi}{2}$$

a)



$$\begin{aligned} Z_R &= R \\ Z_L &= j\omega L \\ Z_C &= \frac{1}{j\omega C} \end{aligned}$$

$$\underline{i}_n(t) = \operatorname{Re} \left\{ \underline{i}_n e^{j\omega t} \right\} = \hat{i}_n \cdot \cos(\omega t + \varphi_{i_n})$$

$$\underline{i}_n = \underline{i}_R + \underline{i}_C \quad \text{mit} \quad \underline{i}_C = \frac{\underline{u}_C}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C \cdot \underline{u}_C$$

$$\Rightarrow \underline{i}_n = \frac{\underline{u}_C}{R} + j \underline{u}_C \cdot \omega C$$

$$\hat{i}_n = \sqrt{\left(\frac{\underline{u}_C}{R}\right)^2 + (\underline{u}_C \cdot \omega C)^2}$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_n &= \underline{u}_L + \underline{u}_C \\ &= \underline{i}_n \cdot j\omega L + \underline{u}_C \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} \text{mit } \underline{i}_n &= \frac{1V}{1k\Omega} + j \left(1V \cdot 10^{-6} \frac{1}{3} \cdot 1\mu F \right) \\ &= 1mA + j \cdot 1mA \Rightarrow \varphi_{i_n} = 45^\circ \left(\frac{\pi}{4} \right) \end{aligned} \right]$$

$$\Rightarrow \underline{u}_n = 1V + j \cdot 10^{-6} \frac{1}{3} \cdot 1mA \cdot (1mA + j \cdot 1mA)$$

$$\underline{u}_n = 1V + j \cdot 1V + j^2 \cdot 1V = 1V + j \cdot 1V - 1V$$

$$\underline{u}_n = 0 + j \cdot 1V = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot 1V$$

$$\Rightarrow \underline{\varphi}_n = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{u} = \sqrt{0^2 + (1V)^2} = 1V$$

c) $\underline{u}_1 = \underline{0} + j \cdot 1V$

$$\underline{I_1} = 1 \text{ mA} + j \cdot 1 \text{ mA}$$

$$\underline{U}_L = \underline{I}_n \cdot j\omega L$$

$$\underline{I}_L = \underline{I}_A = \underline{I_m A} + j \underline{I_m A}$$

$$= 1V \cdot j + j^2 \cdot 1V$$

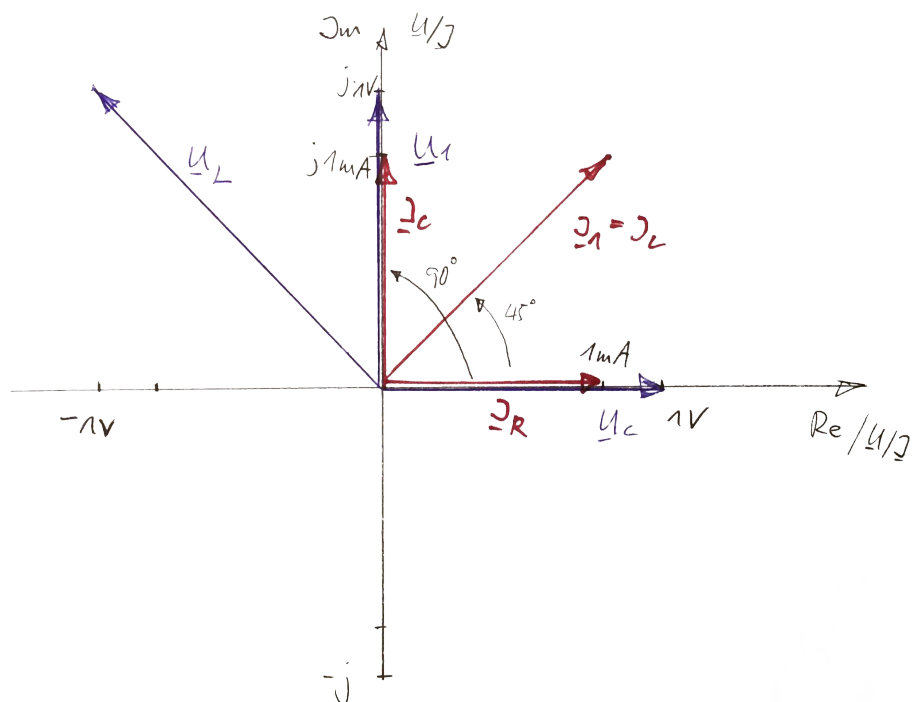
$$\underline{I}_c = j \cdot \underline{U}_c \cdot \omega C$$

$$= \underline{\underline{-1V + j1V}}$$

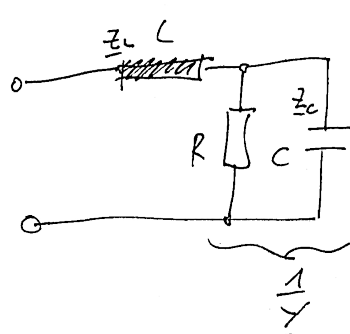
$$= \underline{\underline{0 + j1 \text{ mA}}}$$

$$\underline{U}_C = \underline{U}_R = \underline{1V + 0.5j}$$

$$J_{-R} = \frac{U_c}{R} = \underline{\underline{1 \mu A + 0. j}}$$



d)



NR.

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_C}$$

$$Y = G + j\omega C$$

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{G + j\omega C}$$

$$j\omega L = j1k\Omega$$

$$\frac{1}{j\omega C} = -j1k\Omega$$

$$Z = Z_L + \frac{1}{Y}$$

$$= j\omega L + \frac{1}{G + j\omega C} = j\omega L + \frac{G - j\omega C}{G^2 + (\omega C)^2}$$

$$= \frac{G}{G^2 + (\omega C)^2} + \frac{j\omega L(G^2 + (\omega C)^2) - j\omega C}{G^2 + (\omega C)^2}$$

$$= \frac{G}{G^2 + (\omega C)^2} + j \left(\frac{\omega L(G^2 + (\omega C)^2) - \omega C}{G^2 + (\omega C)^2} \right)$$

$$Z = \underbrace{\frac{G}{G^2 + (\omega C)^2}}_R + j \underbrace{\left(\omega L - \frac{\omega C}{G^2 + (\omega C)^2} \right)}_X$$

mit

$$G = \frac{1}{R} = 1mS$$

$$\omega C = 1mS$$

$$\omega L = 1k\Omega$$

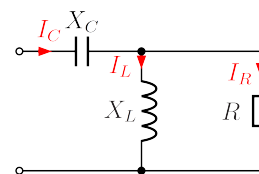
$$Z = \underline{\underline{500\Omega - j500\Omega}}$$

3. Aufgabe:

Folgende Schaltung ist an eine Wechselspannung von $U = 100\text{ V}$ mit $\omega = 100\text{ s}^{-1}$ angeschlossen.

Die Bauteilwerte sind:

$C = 500\text{ }\mu\text{F}$, $L = 250\text{ mH}$, $R = 50\text{ }\Omega$.



Gesucht sind die Ströme I_C im Kondensator, I_L in der Spule und I_R im ohmschen Widerstand.

Lösung:

Zunächst werden die Blindwiderstände von C und L bestimmt.

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000s^{-1} \cdot 500\mu F} = 20 \, \Omega$$

$$X_L = \omega L = 100s^{-1} \cdot 250mH = 25 \, \Omega$$

Darstellung der verschiedenen angegebenden Größen in komplexer Form:

$$\begin{aligned} X_C &= 20 \, \Omega &\Rightarrow \underline{X}_C &= -j20 \, \Omega \\ X_L &= 25 \, \Omega &\Rightarrow \underline{X}_L &= j25 \, \Omega \\ R &= 50 \, \Omega &\Rightarrow \underline{R} &= 50 \, \Omega \\ U &= 100 \, V &\Rightarrow \underline{U} &= -j20 \, V \end{aligned}$$

Man fasst X_L und R zum Ersatzwiderstand Z_1 zusammen:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{X}_L \cdot \underline{R}}{\underline{X}_L + \underline{R}} \\ &= \frac{j25 \, \Omega \cdot 50 \, \Omega}{j25 \, \Omega + 50 \, \Omega} \\ &= \frac{j1250 \, \Omega^2}{50 \, \Omega + j25 \, \Omega} \\ &= \frac{(j1250 \, \Omega^2)(50 \, \Omega - j25 \, \Omega)}{(50 \, \Omega + j25 \, \Omega)(50 \, \Omega - j25 \, \Omega)} \\ &= \frac{j62500 \, \Omega^3 + 31250 \, \Omega^3}{2500 \, \Omega^2 + j625 \, \Omega^2} \\ &= \frac{31250 \, \Omega^3 + j62500 \, \Omega^3}{3125 \, \Omega^2} \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_1 = 10 \, \Omega + j20 \, \Omega$$

In Reihe zu Z_1 ist X_C geschaltet. Man erhält für den Gesamt-Ersatzwiderstand der Schaltung:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{X}_C + \underline{Z}_1 \\ \underline{Z} &= -j20 \, \Omega + 10 \, \Omega + j20 \, \Omega = 10 \, \Omega \end{aligned}$$

Als nächstes wird der Gesamtstrom durch Z bestimmt. Dies ist zugleich der Strom im Kondensator I_C .

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \\ \underline{I}_C &= \frac{100 \, V}{10 \, \Omega} = 10 \, A \end{aligned}$$

Mit diesem Strom kann man die Spannung an der Spule und dem Widerstand berechnen. Er fließt durch den Ersatzwiderstand Z_1 und nennt die Spannung deshalb U_1 .

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_C$$

$$\underline{I}_C = (10 \, \Omega + j20 \, \Omega) \cdot 10 \, \text{A} = 100 \, \text{V} + j200 \, \text{V}$$

Mit Hilfe dieser Spannung kann man jetzt den Strom I_L in der Spule berechnen.

$$\begin{aligned} \underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{X}_L} \\ &= \frac{100 \, \text{V} + j200 \, \text{V}}{j25 \, \Omega} && \text{erweitern mit } j \\ &= \frac{j100 \, \text{V} - 200 \, \text{V}}{-25 \, \Omega} \end{aligned}$$

$$\underline{I}_L = 8 \, \text{A} - j4 \, \text{A}$$

Ebenso geht es mit dem Strom I_R im Widerstand.

$$\begin{aligned} \underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{R}} \\ &= \frac{100 \, \text{V} + j200 \, \text{V}}{50 \, \Omega} \end{aligned}$$

$$\underline{I}_R = 2 \, \text{A} + j4 \, \text{A}$$

Gesucht sind nicht die komplexen Ströme $\underline{I}_R$, $\underline{I}_C$ und $\underline{I}_L$, sondern deren Beträge I_R , I_C und I_L .

Diese kann man mit der Wurzelformel $|z| = z = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2}$ berechnen:

$$I_R = \sqrt{(2 \, \text{A})^2 + (4 \, \text{A})^2} \approx 4,472 \, \text{A}$$

$$I_C = \sqrt{(10 \, \text{A})^2} = 10 \, \text{A}$$

$$I_L = \sqrt{(8 \, \text{A})^2 + (-4 \, \text{A})^2} \approx 8,944 \, \text{A}$$