

1. Aufgabe:

Erläutern Sie die Bedeutung der Eigenschaft 'Kapazität' zunächst für einen Plattenkondensator, dann für beliebigen Körper.

Lösung:

Für den Plattenkondensator gibt die Kapazität den Quotienten aus gespeicherter Ladung und Spannung (Potentialdifferenz) zwischen den Platten an, anschaulich die Speicherfähigkeit des Kondensators für Ladung bei gegebener Spannung.

Dies lässt sich auf beliebige Körper erweitern. Das Potential einer Ladungsverteilung ist direkt proportional zum Betrag der Ladung. Diese Proportionalitätskonstante ist gerade die Kapazität.

2. Aufgabe:

Vergleichen Sie die Kapazität zweier Plattenkondensatoren mit Platten gleicher Größe, aber unterschiedlichem Abstand.

Welcher besitzt die größere Kapazität?

Erklären Sie dies anschaulich, z.B. mittels Betrachtung des Potentials.

Lösung:

Das elektrische Feld in einem Plattenkondensator hängt von der Ladung pro Oberfläche, aber nicht von dem Abstand zwischen den Platten ab (vergleiche das Feld einer unendlich ausgedehnten Platte).

Sind die Platten weiter von einander entfernt, so muss mehr Arbeit aufgewendet werden, um eine Probeladung von einer Seite auf die andere zu bringen (die Kraft ist gleich, aber der Weg ist länger), die Potentialdifferenz (Spannung) ist bei gegebener Ladung also größer. Dann ist aber der Quotient aus Ladung und Spannung also die Kapazität kleiner als bei näher zusammenstehenden Platten.

3. Aufgabe:

Wie groß ist die Kapazität eines Plattenkondensators mit zwei quadratischen Platten der Seitenlänge 0.5 m und einem Abstand von 1 mm?

Lösung:

Formel zur Berechnung der Kapazität C eines Plattenkondensators:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Werte einsetzen

$$C = 8.885 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \frac{(0.5 \text{ m})^2}{0.001 \text{ m}} = 2.2 \cdot 10^{-9} = 2.2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} = \mathbf{2.2 \text{ nF}}$$

4. Aufgabe:

Ein Dielektrikum mit einer relativen Dielektrizitätskonstante von $\epsilon_r = 12$ hält eine elektrisches Feld von $3 \cdot 10^7 \text{ V/m}$ aus. Mit diesem Dielektrikum soll ein Kondensator mit $0.1 \mu\text{F}$ gebaut werden, der eine Spannung von 2000 V aushält.

a) Wie groß muss der Plattenabstand gewählt werden?

b) Welchen Flächeninhalt müssen die Platten haben?

Lösung:

Aus $U = E \cdot d$ folgt

$$d = \frac{U}{E} = \frac{2000 \text{ V}}{3 \cdot 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}}} = 6.7 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Kapazität eines Kondensators mit Dielektrikum:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

umformen nach A und einsetzen:

$$A = \frac{C \cdot d}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{0.1 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 6.7 \cdot 10^{-5} \text{ m}}{8.9 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 12} = 0.063 \text{ m}^2 = \mathbf{630 \text{ cm}^2}$$

5. Aufgabe:

Zwei Kondensatoren $C_1 = 0.4 \mu\text{F}$ und $C_2 = 600 \text{ nF}$ werden parallel geschaltet. Wie groß ist die Gesamtkapazität, die Ladung auf den beiden Kondensatoren und die gesamte Ladung bei $U=5 \text{ V}$.

Lösung:

Gesamtkapazität: mit ($600 \text{ nF} = 0.6 \mu\text{F}$)

$$C_{ges} = C_1 + C_2 = 0.4 \mu\text{F} + 0.6 \mu\text{F} = 1.0 \mu\text{F}$$

Ladungen auf den beiden Kondensatoren: (Beide Kondensatoren sind an die gleiche Spannung U angeschlossen)

$$Q_1 = UC_1 = 5 \text{ V} \cdot 0.4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{V}} = 2 \mu\text{C}$$

$$Q_2 = UC_2 = 5 \text{ V} \cdot 0.6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{V}} = 3 \mu\text{C}$$

Die Gesamtladung kann man mit der Ersatzkapazität C_{ges} berechnen oder die beiden Einzelladungen addieren:

$$Q_{ges} = UC_{ges} = 5 \text{ V} \cdot 1.0 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{V}} = \mathbf{5 \mu\text{C}} = Q_1 + Q_2$$

6. Aufgabe:

Zwei Kondensatoren mit $C_1 = 2 \mu\text{F}$ und $C_2 = 4 \mu\text{F}$ sind in Reihe geschaltet und liegen an einer Gesamtspannung $U = 18 \text{ V}$ wie groß sind an jedem Kondensator die gespeicherten Ladungen und die anliegenden (Teil-)spannungen.

Lösung:

$$\text{Ersatzkapazität: } \frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{2 \mu\text{F}} + \frac{1}{4 \mu\text{F}} = \frac{3}{4 \mu\text{F}}$$

$$\text{Kehrwert bilden: } C_{ges} = \frac{4 \mu\text{F}}{3} = 1.333 \mu\text{F}$$

Die gespeicherte Ladung auf jeder Kondensatorplatte und auf der Ersatzkapazität ist:

$$Q = UC_{ges} = 18 \text{ V} \cdot \frac{4 \mu\text{C}}{3} = 24 \mu\text{C}$$

Die Spannungen an den beiden Kondensatoren ergeben sich als:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{24 \mu\text{C}}{2 \mu\text{F}} = 12 \text{ V} \text{ und } U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{24 \mu\text{C}}{4 \mu\text{F}} = \mathbf{6 \text{ V}} \quad \Rightarrow \quad U_1 + U_2 = U_{ges}$$

7. Aufgabe:

Gegeben ist folgendes Gleichstromnetzwerk mit einem Plattenkondensator (Bild 1):

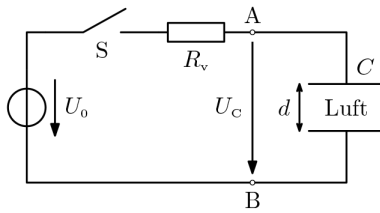


Bild 1

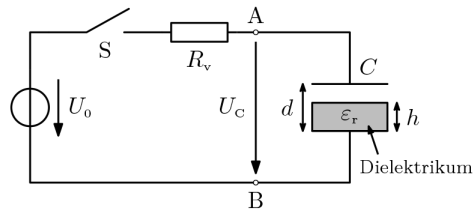


Bild 2

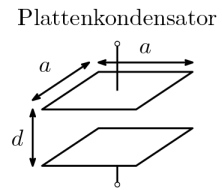


Bild 3

Die Kondensatorplatten sind quadratisch ausgeführt (Bild 3). Folgende Daten sind bekannt:

$$U_0 = 1000 \text{ V}, \quad R_v = 8 \text{ M}\Omega, \quad d = 5 \text{ cm}, \quad h = 3 \text{ cm}, \quad a = 100 \text{ cm} \quad \epsilon_{r,\text{Dielektrikum}} = 13,6$$

Für die Aufgaben werden nacheinander vier Schaltvorgänge durchgeführt:

Vorgang 1: Zuerst wird der Schalter S geschlossen und damit der Plattenkondensator durch die Gleichspannungsquelle U_0 aufgeladen.

Vorgang 2: Nach dem vollständigen Aufladen des Kondensators wird der Schalter wieder geöffnet.

Vorgang 3: Bei geöffnetem Schalter wird anschließend ein plattenförmiges Dielektrikum zwischen die Kondensatorplatten geschoben (Bild 2).

Vorgang 4: Nachdem das Dielektrikum zwischen die Platten geschoben wurde, wird der Schalter wieder geschlossen.

Hinweise: Für die Berechnungen ist die Kondensator-Anordnung als ideal anzunehmen; Randeffekte sowie Verluste im Dielektrikum können vernachlässigt werden. Alle Feldlinien verlaufen parallel zueinander und senkrecht zwischen den Kondensatorplatten.

1. Berechnen Sie die Kapazität C des Kondensators ohne Dielektrikum!
2. Wie groß ist die Spannung U_C zwischen den Klemmen A und B nach dem Einschieben des Dielektrikums (nach Vorgang 3)?
3. Berechnen Sie die Energieinhalte im Kondensator vor und nach dem Einschieben des Dielektrikums!
4. Welche Ladungsmenge fließt zusätzlich auf die Kondensatorplatten, nachdem der Schalter S wieder geschlossen wurde (nach Vorgang 4)?
5. Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf des Kondensatorstroms $i_C(t)$ und der Kondensatorspannung $u_C(t)$ für den Schaltvorgang 4!
Geben Sie auch die Anfangs- und die Endwerte der Verläufe auf der y-Achse an!

Lösung:

1. Kapazität des Kondensators ohne Dielektrikum:

Zur Berechnung der Kapazität werden folgende vier Gleichungen verwendet und in einander eingesetzt:

a) Feldstärke (im homogenen Feld):

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot d \Rightarrow E = \frac{U}{d}$$

b) Verschiebungsstromdichte:

$$Q = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot A$$

c) Stoffgesetz:

$$D = \varepsilon \cdot E$$

d) Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{D \cdot A}{E \cdot d} = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$$

Daraus ergibt sich für die Kapazität des Kondensators:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot A}{E \cdot d} = \frac{\varepsilon \cdot A}{d} = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm} \cdot 1 \text{ m}^2}{0,05 \text{ m}} = 1,77 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 177 \text{ pF}$$

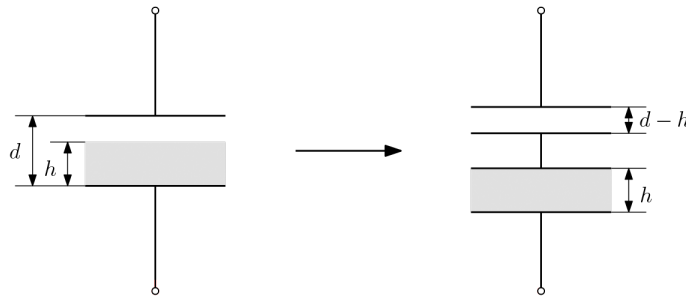
2. Spannung zwischen den Klemmen mit eingeschobenem Dielektrikum:

Da der Kondensator nach dem Aufladen auf die Spannung U_0 von der Spannungsquelle getrennt wird, ist die Ladung des Kondensators vor und nach dem Einschieben des Dielektrikums gleich.

Für die Ladung gilt:

$$Q = C \cdot U_0 = 177 \text{ pF} \cdot 1000 \text{ V} = 177 \text{ nC}$$

Durch das Einschieben des Dielektrikums wird der Kondensator in zwei Bereiche mit jeweils unterschiedlichen Dielektrizitätszahlen geteilt (vgl. Lösung zu Aufgabe Elektrisches Feld Ü1).



Für die Kapazität der in Reihe geschalteten Kondensatoren gilt:

$$C_L = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d - h} = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm} \cdot 1 \text{ m}^2}{0,05 \text{ m} - 0,03 \text{ m}} = 4,43 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 443 \text{ pF}$$

$$C_D = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_D \cdot A}{h} = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm} \cdot 13,6 \cdot 1 \text{ m}^2}{0,03 \text{ m}} = 4,01 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 4,01 \text{ nF}$$

Gesamtkapazität der beiden in Reihe geschalteten Kondensatoren (vgl. Lösung zu Aufgabe Elektrisches Feld Ü1):

$$C_{\text{neu}} = \frac{C_L \cdot C_D}{C_L + C_D} = \frac{443 \text{ pF} \cdot 4,01 \text{ nF}}{443 \text{ pF} + 4,01 \text{ nF}} = 3,99 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 399 \text{ pF}$$

Die Spannung, die sich nach dem Einschieben des Dielektrikums ergibt wird aus der bekannten Ladung und der neuen Kapazität berechnet:

$$U_{\text{neu}} = \frac{Q}{C_{\text{neu}}} = \frac{177 \text{ nC}}{399 \text{ pF}} = 443,6 \text{ V}$$

3. Energieinhalt des Kondensators vor und nach dem Einschieben des Dielektrikums:

Der Energieinhalt des Kondensators ist Integral der aufgenommenen Leistung. Die Leistung wird nach $P = U(Q) \cdot I$ berechnet, wobei die Spannung U in diesem Fall abhängig von der Ladung Q des Kondensators ist. Der Strom I gibt die Ladungsänderung pro Zeit an. Weiterhin wird die Beziehung $Q = C \cdot U$ eingesetzt.

$$W = \int P dt = \int U(Q) \cdot I dt = \int U(Q) \cdot \frac{dQ}{dt} dt = \int \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2C} \cdot Q^2 = \frac{1}{2} U \cdot Q$$

Daraus können die Energieinhalte berechnet werden:

$$W_1 = \frac{1}{2} U_0 \cdot Q = \frac{1}{2} \cdot 177 \text{ nC} \cdot 1000 \text{ V} = 8,85 \cdot 10^{-5} \text{ J} = 88,5 \text{ } \mu\text{J}$$
$$W_2 = \frac{1}{2} U_C \cdot Q = \frac{1}{2} \cdot 177 \text{ nC} \cdot 444 \text{ V} = 3,93 \cdot 10^{-5} \text{ J} = 39,3 \text{ } \mu\text{J}$$

4. Zusätzliche Ladungsmenge mit Dielektrikum:

Durch die geänderte Kapazität kann bei gegebenen Spannung U_0 eine größere Ladungsmenge Q_{neu} vom Kondensator aufgenommen werden.

$$Q_{\text{neu}} = C_{\text{neu}} \cdot U_0 = 399 \text{ pF} \cdot 1000 \text{ V} = 399 \text{ nC}$$
$$\Delta Q = Q_{\text{neu}} - Q = 399 \text{ nC} - 177 \text{ nC} = 222 \text{ nC}$$

5. Qualitativer Verlauf des Kondensatorstroms und der Kondensatorspannung:

Der Startwert des Kondensatorstroms ergibt sich aus dem Spannungsabfall über dem Vorwiderstand R_v (Maschengleichung: $U_{R_v} = U_0 - U_{\text{neu}}$) und dem Vorwiderstand R_v nach dem *ohmschen Gesetz*:

$$i_C(t=0) = \frac{U_0 - U_{\text{neu}}}{R_v} = \frac{1000 \text{ V} - 444 \text{ V}}{8 \text{ M}\Omega} = 69,5 \text{ } \mu\text{A}$$

