Elektrotechnik: Übungsblatt 3 - Gleichstromschaltungen

1. Aufgabe:

Nennen sie die Kirchhoffschen Gesetzte und erläutern sie ihre physikalischen Prinzipien mit eigenen Worten.

Lösung:

Knotenregel: ”Die vorzeichenrichtige Summe aller Ströme, die in die Netzwerkknoten herein- oder heraus fließen, ist immer 0 A”.
Hintergrund: Ladungserhaltung.

Maschenregel: ”Die vorzeichenrichtige Summe aller Spannungen entlang einer Masche (Schleife) in einem Netzwerk ist immer 0 V”.

2. Aufgabe:

Zwei Widerstände R_1 und R_2 werden parallel geschaltet. Wie groß ist der Gesamtwiderstand der Schaltung wenn

a.) $R_1 \ll R_2$ ist?
b.) R_1 unendlich groß ist?
c.) $R_2 = 0\ \Omega$ ist.

Lösung:

Bei Parallelschaltung addieren sich Widerstände reziprok:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \cdots$$

hier folgt:

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

a) $R_1 + R_2 \approx R_2 \Rightarrow R_{ges} = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \approx \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_2} = R_1$

Hier sucht sich der Strom den Weg mit dem kleinsten Widerstand.

b) $\dfrac{1}{R_1} = \dfrac{1}{\infty} = 0 \quad \Rightarrow \dfrac{1}{R_{ges}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{R_2} \Rightarrow R_{ges} = R_2$

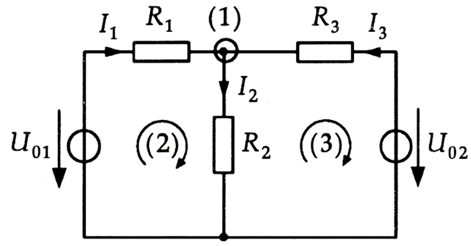
c) $R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{ges} = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{R_1 \cdot 0}{R_1 + 0} = 0$

Der Strom kann über R_2 einfach an R_1 vorbeifließen.

3. Aufgabe:

Wenden Sie Knoten- und Maschenregel auf folgende Aufgabe an:

Gegeben ist ein elektronisches Netzwerk mit zwei Spannungsquellen und folgenden Größen:
$U_{01} = 24$ V, $U_{02} = 12$ V, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $R_3 = 15\ \Omega$
Gesucht sind die Ströme I_1, I_2, I_3 bzw. die Aufstellung des LGS.



Lösung:

(1) $I_2 = I_1 + I_3$
(2) $U_{01} = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2$
(3) $U_{02} = R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3$

(1) in (3)

$U_{02} = R_2 \cdot (I_1 + I_3) + R_3 \cdot I_3$ => $12 = 50 \cdot I_1 + 50 \cdot I_3 + 15 \cdot I_3$
$50 \cdot I_1 + 65 \cdot I_3 = 12$ (4)

(1) in (2)

$U_{01} = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot (I_1 + I_3)$ => $24 = 20 \cdot I_1 + 50 \cdot I_1 + 50 \cdot I_3$
$70 \cdot I_1 + 50 \cdot I_3 = 24$ (5)

(4) · 1,4 + (5) · (- 1)

$$\begin{aligned} 70 \cdot I_1 + 91 \cdot I_3 &= 16{,}8 \\ -70 \cdot I_1 - 50 \cdot I_3 &= -24 \quad | + \\ \hline 41 \cdot I_3 &= -7{,}2 \\ \mathbf{I_3} &\mathbf{= -0{,}176} \end{aligned}$$

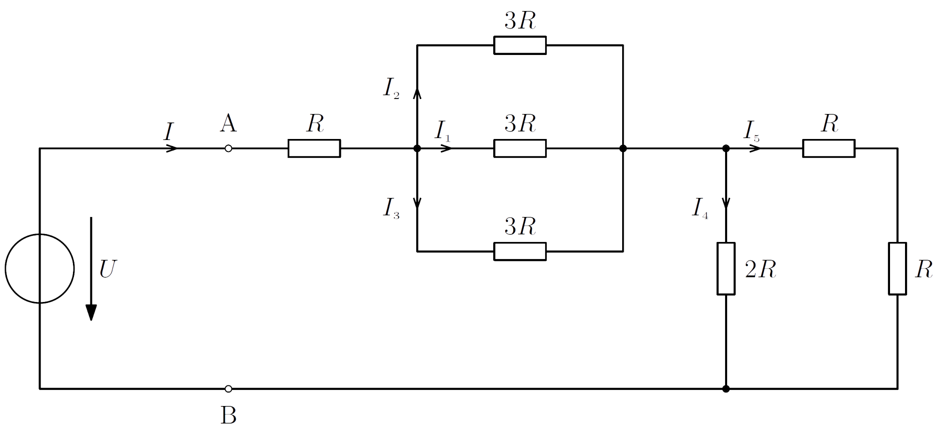
=> in (3) einsetzen

$$\begin{aligned} 50 \cdot I_2 - 0{,}176 \cdot 15 &= 12 \\ 50 \cdot I_2 &= 14{,}64 \\ \mathbf{I_2} &\mathbf{= 0{,}293} \end{aligned}$$

$I_1 = I_2 - I_3$
$I_1 = 0{,}293 - (-0{,}176)$
$\mathbf{I_1 = 0{,}469}$

4. Aufgabe:

Die Abbildung zeigt ein Netzwerk, das aus einer Gleichspannungsquelle gespeist wird.



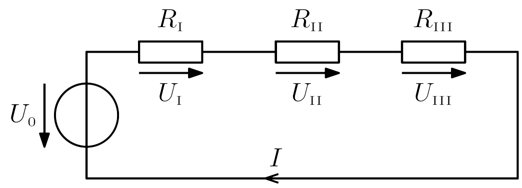
a) Wie groß sind die sechs Zweigströme I und I_1 bis I_5?

b) Wie groß ist der Gesamtwiderstand zwischen den Klemmen A und B?

Lösung:

1) Berechnung des Gesamtwiderstandes:

Die Widerstände des Netzwerks werden in drei Ersatzwiderstände R_I, R_{II} und R_{III} zusammengefasst.



$$R_{ges} = R_I + R_{II} + R_{III} \quad \text{mit:} \quad R_I = R$$

$$R_{II} = \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{3R} + \frac{1}{3R}} = \frac{1}{\frac{3}{3R}} = R$$

$$R_{III} = \frac{(R+R) \cdot 2R}{(R+R) + 2R} = \frac{4R^2}{4R} = R$$

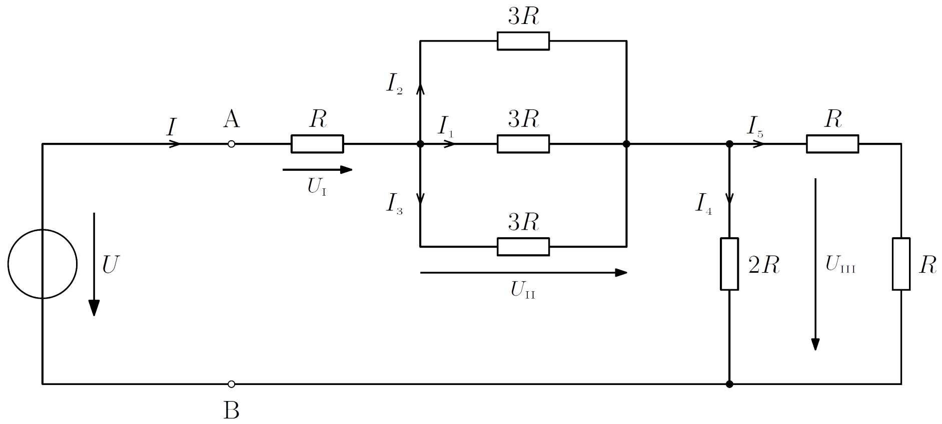
$$R_{ges} = R + R + R = 3R$$

2) Berechnung des Gesamtstroms:

Aus der Quellspannung und dem Gesamtwiderstand nach dem ohmschen Gesetz :

$$I_{ges} = \frac{U_{ges}}{R_{ges}} = \frac{U}{3R}$$

Aus dem Gesamtstrom und den Teilwiderständen können zunächst die Spannungsabfälle über den Teilwiderständen berechnet werden und daraus wiederum die Teilströme.



3) Berechnung der Ströme I_1, I_2 und I_3:

$$U_{II} = R_{II} \cdot I_{ges} = R \cdot \frac{U}{3R} = \frac{1}{3}U$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{U_{II}}{3R} = \frac{\frac{1}{3}U}{3R} = \frac{1}{9}\frac{U}{R}$$

Hinweis: In einer Parallelschaltung fällt an allen Zweigen dieselbe Spannung ab. Da die Widerstände in dieser Parallelschaltung alle gleich groß sind und über allen dieselbe Spannung abfällt, ist auch der Strom durch die einzelnen Widerstände gleich groß.

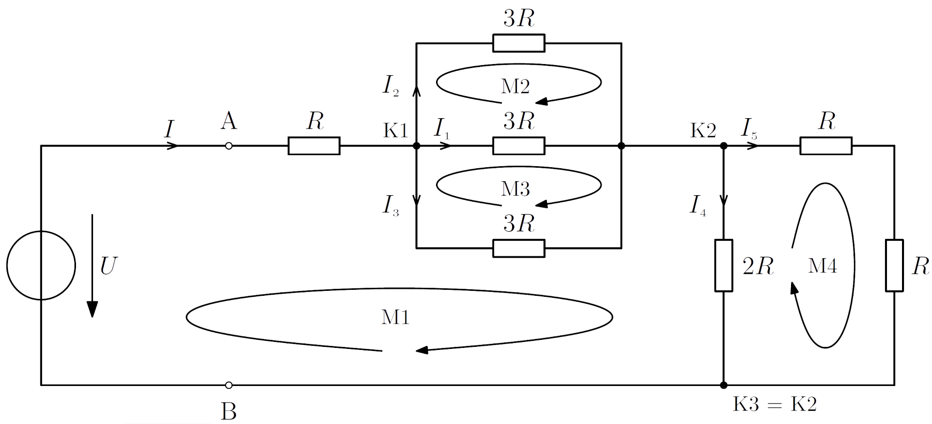
4) Berechnung der Ströme I_4 und I_5:

$$U_{III} = R_{III} \cdot I_{ges} = R \cdot \frac{U}{3R} = \frac{1}{3}U$$

$$I_4 = I_5 = \frac{U_{III}}{2R} = \frac{\frac{1}{3}U}{2R} = \frac{1}{6}\frac{U}{R}$$

Alternativer Lösungsweg:

Aufstellen von Knotenpunkt- und Maschengleichungen:



Das Netzwerk besteht aus drei Kontenpunkten, für die nach dem 1. Kirchhoff'schen Gesetz (Knotenpunktregel) zwei unabhängige eine Gleichung aufgestellt werden können.

$K1: \quad I = I_1 + I_2 + I_3$

$K2: \quad I = I_4 + I_5$

Weiterhin können vier Maschen in das Netzwerk gelegt werden, für die nach dem 2. Kirchhoff'schen Gesetz (Maschenregel) vier unabhängige Maschengleichung aufgestellt werden können.

Dabei werden die Spannungsabfälle an den Widerständen nach dem ohmschen Gesetz aus dem Widerstand und dem fließenden Strom berechnet.

$M1: \quad 0 = -U + I_1 \cdot R + I_3 \cdot 3R + I_4 \cdot 2R$

$M2: \quad 0 = I_2 \cdot 3R - I_1 \cdot 3R$

$M3: \quad 0 = I_1 \cdot 3R - I_1 \cdot 3R$

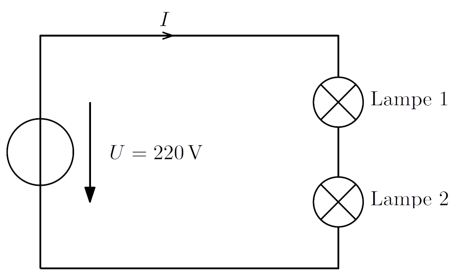
$M4: \quad 0 = I_5 \cdot (R + R) - I_4 \cdot 2R$

Aus den sechs Gleichungen lässt sich folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3R & 2R & 0 & R \\ -3R & 3R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3R & 0 & -3R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2R & 2R & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus den sechs Gleichungen lassen sich die sechs gesuchten Ströme zum Beispiel mit dem Einsetzungsverfahren berechnen (wird hier nicht durchgeführt).

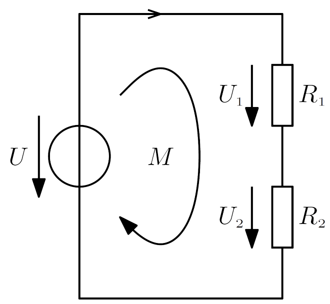
5. Aufgabe:



Zwei Glühlampen für $U_N = 110$ V haben die Leistungsangaben $P_{1N} = 40$ W und $P_{2N} = 60$ W. Sie liegen in Reihe an einer Spannung von 220 V. Welche Leistungen werden in beiden Lampen umgesetzt?
Anmerkung: Vorausgesetzt ist, dass die Widerstände der Glühlampen konstant sind, was in der Praxis nicht der Fall ist, da $R = f(\vartheta)$.

Lösung:

1. Ersatzschaltbild:



Die beiden Glühlampen werden im elektrischen Ersatzschaltbild als ohmsche Widerstände dargestellt.
Die Widerstände R_1 und R_2 lassen sich aus den gegebenen Nenndaten der beiden Lampen mit Hilfe der Formel für die elektrische (Wirk-)Leistung ($P = U \cdot I$) und dem ohmschen Gesetz ($R = \frac{U}{I}$) berechnen.

Zur Berechnung des Widerstandes der beiden Lampen aus der angegebenen Nennspannung und der angegebenen Nennleistung wird die Formel zur Berechnung der Leistung und das ohmsche Gesetz verwendet:

$$P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}$$

Lampe 1: $\quad R_1 = \dfrac{U_{1N}}{P_{1N}} = \dfrac{(110\ \mathrm{V})^2}{40\ \mathrm{W}} = 302.5\ \Omega$

Lampe 2: $\quad R_2 = \dfrac{U_{2N}}{P_{2N}} = \dfrac{(110\ \mathrm{V})^2}{60\ \mathrm{W}} = 201.7\ \Omega$

Die Spannungen U_1 und U_2 , die an den beiden Widerständen anliegen werden mithilfe des 2. Kirchhoff'schen Gesetzes (Maschenregel) und dem ohmschen Gesetz berechnet:

$$0 = -U + U_1 + U_2 \;\Rightarrow\; \begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ U &= I \cdot R_1 + I \cdot R_2 = I \cdot (R_1 + R_2) \end{aligned}$$

Maschenregel: In einer Masche ist die vorzeichenrichtige Summe aller Spannungsabfälle in jedem Augenblick gleich Null.

Mit den bekannten Widerständen R_1 und R_2 und der Spannung U wird der Strom berechnet, der in der Reihenschaltung fließt:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{220 \text{ V}}{302.5 \ \Omega + 201.7 \ \Omega} = \frac{220 \text{ V}}{504.2 \ \Omega} = 0.436 \text{ A}$$

Aus dem Strom werden die Spannungsabfälle U_1 und U_2 an den Widerständen R_1 und R_2 berechnet. Ein Kennzeichen einer Reihenschaltung ist, dass durch alle Bauelemente derselbe Strom fließt.

$U_1 = I \cdot R_1 = 0.436 \text{ A} \cdot 302.5 \ \Omega = 132 \text{ V} \quad > \quad U_{1N} = 110 \text{ V}$

$U_2 = I \cdot R_2 = 0.436 \text{ A} \cdot 201.7 \ \Omega = 88 \text{ V} \quad < \quad U_{2N} = 110 \text{ V}$

Hinweis: Die Spannungsabfälle an den einzelnen Widerständen in einer Reihenschaltung können auch mithilfe der Spannungsteilerregel berechnet werden.

Aus dem fließenden Strom und der anliegenden Spannung wird die Leistung berechnet, die in den beiden Lampen umgesetzt wird.

$P_1 = I \cdot U_1 = 0.436 \text{ A} \cdot 132 \text{ V} = 58 \text{ W} \quad > \quad P_{1N} = 40 \text{ W}$

$P_2 = I \cdot U_2 = 0.436 \text{ A} \cdot 88 \text{ V} = 38 \text{ W} \quad > \quad P_{2N} = 60 \text{ W}$

Die Leistung P_1, die in Lampe 1 umgesetzt wird, ist größer als die Nennleistung P_{1N}, wodurch die Lampe heller leuchtet als im Nennbetrieb. Die Leistung P_2, die in Lampe 2 umgesetzt wird, ist kleiner als die Nennleistung P_{2N}, wodurch die Lampe nicht so hell leuchtet wie im Nennbetrieb.

Der Widerstand der Glühlampen wird als konstant angenommen (ohmscher Widerstand). In der Realität ist der Widerstand des Glühfadens allerdings temperaturabhängig. Die meisten Metalle haben einen positiven Temperaturkoeffzienten, wodurch der elektrische Widerstand mit steigender Temperatur zunimmt.

6. Aufgabe:

Gegeben ist eine (reale) Spannungsquelle mit linearem Strom-Spannungsverhalten. Diese soll durch eine Ersatzspannungsquelle nachgebildet werden. Hierzu werden zwei Belastungsversuche mit verschiedenen Widerständen (R_1 und R_2) durchgeführt.

Es ergeben sich folgende Messwerte:

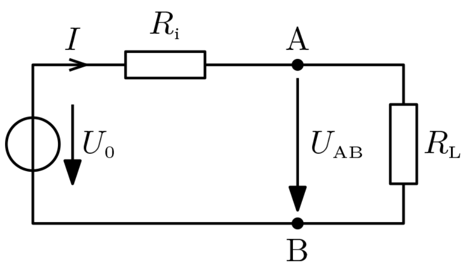
$I_1 = 50 \ A$ bei $R_1 = 1 \ \Omega$

$I_2 = 10 \ A$ bei $R_2 = 9 \ \Omega$

1. Wie groß sind die Leerlaufspannung U_q, der Innenwiderstand R_i und der Kurzschlussstrom I_K?

2. Bei welchem Belastungswiderstand R_L gibt die Spannungsquelle die maximale Leistung ab?

Lösung:



Im Schaltbild der Ersatzspannungsquelle sind die Leerlaufspannung U_0 und der Innenwiderstand R_i unbekannt. Diese unbekannten Größen sollen durch zwei Belastungsversuche mit den Widerständen R_1 und R_2 ermittelt werden.

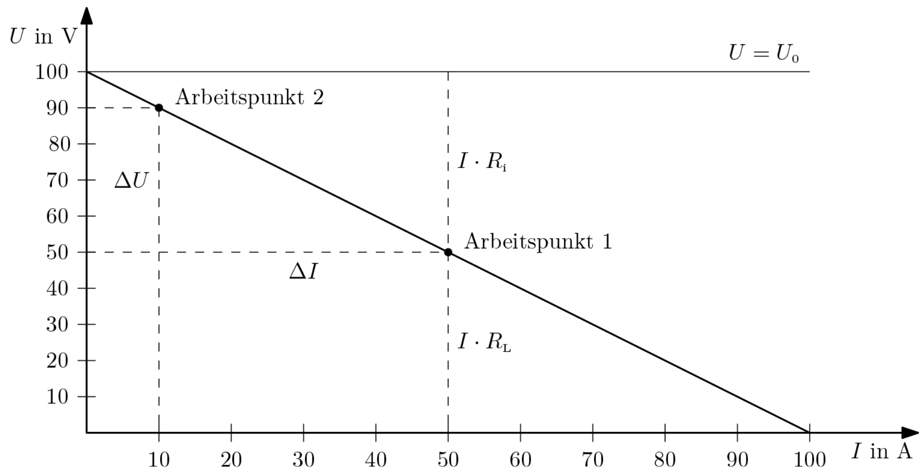
Für die theoretische Berechnung der charakterisitschen Größen einer Ersatzspannungsquelle werden oftmals die Extremfälle Leerlauf und Kurzschluss verwendet. Die entsprechenden Versuche sind in der Praxis allerdings häufig nicht durchführbar.

1. **Leerlaufspannung, Innenwiderstand und Kurzschlussstrom:**

   Die charakteristischen Größen der Ersatzspannungsquelle (U_0, I_K, R_i) können entweder graphisch aus der UI-Kennlinie oder rechnerische ermittelt werden.

   a) Graphische Lösung:

   Werden die gemessenen Werte für Strom und Spannung in einem UI-Diagramm eingetragen und durch eine Gerade verbunden, ergibt sich die rechts dargestellte UI-Kennlinie der Ersatzspannungsquelle.



   Die Gerade schneidet die Achsen bei der Leerlaufspannung U_0 und dem Kurzschlussstrom I_K. Die jeweilige Klemmspannung U_{AB} in den verschiedenen Arbeitspunkten ergibt sich aus $U_{AB} = I \cdot R_L$, wobei R_L der jeweilige Belastungswiderstand ist. Die Differenz zwischen der Leerlaufspannung und der Klemmspannung fällt am Innenwiderstand der Ersatzspannungsquelle ab (Maschengleichung).

   Der Innenwiderstand R_i der Ersatzspannungsquelle ist der Betrag der Steigung der UI-Kennlinie:

$$R_i = \frac{|\Delta U|}{|\Delta I|} = \frac{|U_1 - U_2|}{|I_1 - I_2|} = \frac{|50\,\text{V} - 90\,\text{V}|}{|50\,\text{A} - 10\,\text{A}|} = \frac{|-40\,\text{V}|}{|40\,\text{A}|} = 1\,\Omega$$

b) Rechnerische Lösung:

Für beide Versuche wird jeweils eine Maschengleichung aufgestellt:

$$
\begin{aligned}
U_0 &= I_1(R_i + R_1) \\
U_0 &= I_2(R_i + R_2)
\end{aligned}
$$

Durch das Gleichsetzen der beide Gleichungen wird der Innenwiderstand R_i bestimmt:

$$
\begin{aligned}
I_1(R_i + R_1) &= I_2(R_i + R_2) \\
0 &= I_1 \cdot R_i + I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_i - I_2 \cdot R_2 \\
R_i(I_1 - I_2) &= I_2 \cdot R_2 - I_1 \cdot R_1 \\
R_i &= \frac{I_2 \cdot R_2 - I_1 \cdot R_1}{I_1 - I_2} = \frac{10\,\mathrm{A} \cdot 9\,\Omega - 50\,\mathrm{A} \cdot 1\,\Omega}{50\,\mathrm{A} - 10\,\mathrm{A}} = \frac{40\,\mathrm{V}}{40\,\mathrm{A}} = 1\,\Omega
\end{aligned}
$$

Durch das Einsetzen des Innenwiderstandes in eine der beiden obigen Gleichungen wird die Leerlaufspannung berechnet:

$$
U_0 = I_1(R_i + R_1) = 50\,\mathrm{A} \cdot (1\,\Omega + 1\,\Omega) = 100\,\mathrm{V}
$$

2. Maximal abgegebene Leistung:

Die abgegebene Leistung der Spannungsquelle ist die Leistung, die im Lastwiderstand R_L umgesetzt wird.

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R_\mathrm{L} \quad \text{mit:} \quad I = \frac{U_0}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}}$$
$$P = \left(\frac{U_0}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}}\right)^2 \cdot R_\mathrm{L} = U_0^2 \cdot \frac{R_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2}$$

Um die Extremwerte der Funktion $P(R_\mathrm{L})$ zu finden, wird die erste Ableitung gleich Null gesetzt.

Hinweis: Die Quotientenregel lautet:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad \text{mit:} \qquad u = U_0^2 \cdot R_\mathrm{L} \qquad u' = U_0^2$$
$$v = (R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2 \qquad v' = 2(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})$$

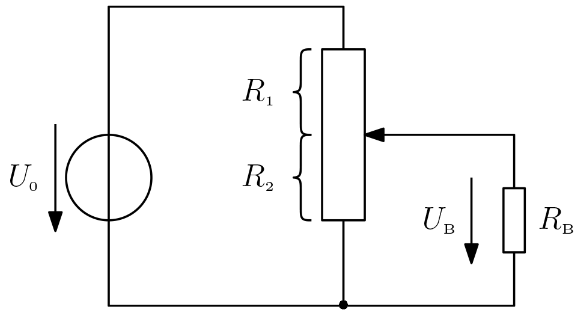
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R_\mathrm{L}} &= \frac{U_0^2 \cdot (R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^2 - U_0^2 \cdot R_\mathrm{L} \cdot 2(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^4} \\
&= \frac{U_0^2}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^4} \cdot (R_\mathrm{i}^2 + 2R_\mathrm{L}R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}^2 - 2R_\mathrm{L}^2 - 2R_\mathrm{i}R_\mathrm{L}) \\
&= \frac{U_0^2}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})^4} \cdot (R_\mathrm{i}^2 - R_\mathrm{L}^2)
\end{aligned}$$

Der erste Term wird null, wenn gilt: $R_\mathrm{L} \to \infty$.

Der zweite Term wird null, wenn gilt: $0 = R_\mathrm{i}^2 + R_\mathrm{L}^2 \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L}$.

Leistungsanpassung: Die abgegebene Leistung der Spannungsquelle wird maximal, wenn der Innenwiderstand und der Lastwiderstand gleich groß sind.

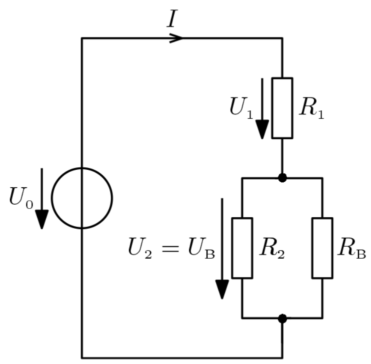
7. Aufgabe:



Ein Spannungsteiler mit dem Gesamtwiderstand $R = R_1 + R_2 = 400\,\Omega$ liegt an der Spannung $U_0 = 100\,\text{V}$. Wie groß müssen die Teilwiderstände R_1 und R_2 sein, damit am Belastungswiderstand $R_B = 800\,\Omega$ eine Spannung von $U_B = 40\,\text{V}$ liegt?

Lösung:

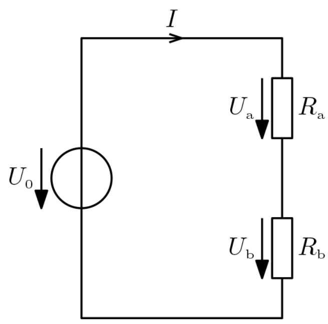
Spannungsteilerregel:



Vereinfachung des Ersatzschaltbildes mit:

$R_a = R_1$

$R_b = (R_2 || R_B)$



In einer *Reihenschaltung* von Widerständen verhalten sich die einzelnen Spannungsabfälle untereinander so wie die Widerstände.

Maschenregel:	$U_0 = I \cdot R_a + I \cdot R_b$
Spannungsabfall an R_a:	$U_a = I \cdot R_a$
Spannungsabfall an R_b:	$U_b = I \cdot R_b$

$$I = \frac{U_0}{R_a + R_b} = \frac{U_a}{R_a} = \frac{U_b}{R_b} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{U_0}{U_a} &= \frac{R_{ges}}{R_a} \\ \frac{U_0}{U_b} &= \frac{R_{ges}}{R_b} \end{aligned}$$

Anwendung der Spannungsteilerregel:

1. Berechnung der Einzelwiderstände und des Gesamtwiderstandes:

$$R_{\text{ges}} = R_1 + (R_2||R_B) = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_B}{R_2 + R_B}$$
$$R_a = R_1 = 400\,\Omega - R_2$$
$$R_b = (R_2||R_B) = \frac{R_2 \cdot R_B}{R_2 + R_B}$$

2. Einsetzen in die Spannungsteilerregel:

$$\frac{U_0}{U_B} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_b} = \frac{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_B}{R_2 + R_B}}{\frac{R_2 \cdot R_B}{R_2 + R_B}} = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_B) + R_2 \cdot R_B}{R_2 \cdot R_B} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_B + R_2 \cdot R_B}{R_2 \cdot R_B}$$

Zahlenwerte einsetzen:

$$\frac{100\,\text{V}}{40\,\text{V}} = \frac{(400\,\Omega - R_2) \cdot R_2 + (400\,\Omega - R_2) \cdot 800\,\Omega + R_2 \cdot 800\,\Omega}{R_2 \cdot 800\,\Omega}$$
$$800\,\Omega \cdot R_2 \cdot 2{,}5 = 400\,\Omega \cdot R_2 - R_2^2 + 320\,000\,\Omega^2 - 800\,\Omega \cdot R_2 + 800\,\Omega \cdot R_2$$
$$2000\,\Omega \cdot R_2 = -R_2^2 + 400\,\Omega \cdot R_2 + 320\,000\,\Omega^2$$
$$0 = R_2^2 + 1600\,\Omega \cdot R_2 - 320\,000\,\Omega^2$$

Auflösen nach R_2 (z.B. mit p-q-Formel):

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$R_{2,1} = -\frac{1600\,\Omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{1600\,\Omega}{2}\right)^2 + 320\,000\,\Omega^2} = 180\,\Omega$$
$$R_{2,2} = -\frac{1600\,\Omega}{2} - \sqrt{\left(\frac{1600\,\Omega}{2}\right)^2 + 320\,000\,\Omega^2} = -1780\,\Omega$$

Da nur positive Werte für Widerstände möglich sind gilt: $R_2 = 180\,\Omega$. Für R_1 ergibt sich daraus $R_1 = 220\,\Omega$.