

Elektrotechnik: Übungsblatt 1 - Grundlagen

1. Aufgabe:

Rechnen Sie mm^2 (Quadratmillimeter) in SI-Einheiten um.

Lösung:

$$\text{mm}^2 = (\text{mm})^2 = (10^{-3} \text{ m})^2 = (10^{-3})^2 \cdot \text{m}^2 = \mathbf{10^{-6} \text{ m}^2}$$

2. Aufgabe:

Drücken Sie die inkohärente Einheit der Geschwindigkeit 1 km/h durch die Basiseinheiten aus.

Lösung:

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1 \text{ m}}{3.6 \text{ s}} = 0.278 \text{ m/s}.$$

3. Aufgabe:

Führen Sie die Einheit der elektrischen Spannung, das Volt [V], auf die Basiseinheiten zurück.

Lösung:

Aus der Einheitenbeziehung für die Energie:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Ws} = 1 \text{ V} \cdot \text{A} \cdot \text{s} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \quad \text{folgt:} \quad 1 \text{ V} = \frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3 \cdot \text{A}}$$

4. Aufgabe:

Eine Rechnung ergibt eine Größe mit der Einheit $\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}^2 / (\text{kg} \cdot \text{m})$. Zeigen Sie, dass es sich hierbei um eine Größe der Dimension einer Geschwindigkeit handelt.

Lösung:

$$\text{Es git:} \quad \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} = \frac{\text{W} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{kg} \cdot \text{ms}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5. Aufgabe:

Die Spannung zwischen zwei Punkten im elektrostatischen Feld sei $45'000 \text{ V}$. Als Probeladung verwenden wir ein Proton (Wasserstoffkern, einfache positive Elementarladung).

- Welche Arbeit erfährt die Probeladung, wenn sie diese Spannung durchfällt?
- Welche Geschwindigkeit erreicht das Proton auf dieser Beschleunigungsstrecke, wenn die Anfangsgeschwindigkeit 0 ist? Hinweis:
Der Energieerhaltungssatz ergibt, dass die geleistete Arbeit in kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$ verwandelt wird. Die Masse des Protons ist $m_p = 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Lösung:

- a) Berechnung der Arbeit:

Aus der Tabelle im Anhang sehen wir: Arbeit [J] = [VAs]. Mit der Spannung [V] und der Elementarladung $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ As folgt:

$$W = q \cdot U = e_0 \cdot U = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 4.5 \cdot 10^4 \text{ V} = 1.602 \cdot 4.510^{-19} \cdot 10^4 \text{ AsV} \\ = 7.209 \cdot 10^{-15} \text{ J} \approx 7.2 \text{ fJ}$$

- b) Berechnung der Geschwindigkeit des Protons: Die Arbeit, die durch das elektrische Feld an dem Proton geleistet wird, wandelt sich vollständig in kinetische Energie (Bewegungsenergie) um. Daher

$$W = W_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \\ v = \sqrt{\frac{2W}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7.2 \cdot 10^{-15} \text{ J}}{1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = \sqrt{8.6073 \cdot 10^{12} \frac{\text{J}}{\text{kg}}}$$

Hier liegt einer der Fälle vor, in denen man in SI-Basiseinheiten umwandeln muss, weil man sonst nicht weiter kommt. Also:

$$\frac{\text{J}}{\text{kg}} = \frac{\text{kg m}^2/\text{s}^2}{\text{kg}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Damit ergibt sich das Endergebnis:

$$v = \sqrt{8.6073 \cdot 10^{12} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \mathbf{2.934 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

6. Aufgabe:

Obwohl die elektrische Kraft zwischen typischen Elementarteilchen um viele Größenordnung stärker ist als die Gravitationskraft, dominiert letztere auf makroskopischen Skalen nahezu vollständig. Weshalb?

Lösung:

Da zwei gegensätzliche elektrische Ladungen existieren, können sie sich in ihrer Wirkung gegenseitig aufheben bzw. ausgleichen.

Für die Masse gilt dies nicht (es existiert keine positive und negative Masse), massereiche Körper ziehen sich immer gegenseitig an. Da im Universum gleich viel positive und negative Ladung existiert und Ladungen vergleichsweise leicht beweglich sind, gleichen sich eventuelle Aufladungen auf längere Zeiten gesehen meist aus.

Die allermeisten Körper sehen von weitem gesehen also elektrisch neutral aus, üben also auch keine elektrische Kraft aus. Die Massenanziehung bleibt aber erhalten und wirkt auch über große Entfernungen (siehe auch Gravitationswellen).

7. Aufgabe:

Elektrische Felder werden häufig durch 'Feldlinien' visualisiert. Welche physikalischen Vorhersagen lassen sich aufgrund solcher Feldlinienbilder treffen?

Lösung:

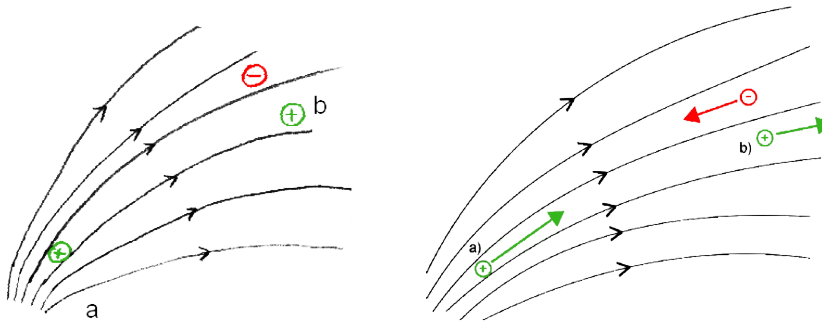
Die Feldlinien visualisieren den Verlauf der elektrischen Kraft auf eine (im Vergleich zu den felderzeugenden Ladungen) kleine Probeladung im Raum.

Die Kraft auf eine positive Probeladung ist tangential zu den Feldlinien, zeigt in die gleiche Richtung und ist proportional zu der Dichte der Kraftlinien an dem jeweiligen Ort.

8. Aufgabe:

In welche Richtung wirkt jeweils die Kraft (Vektoren einzeichnen...) auf die drei eingezeichneten Probeladungen?

Ist der Betrag der Kraft für die Probeladung bei (a) größer oder kleiner als der für die Probeladungen bei (b)?

**Lösung:**

Erinnerung: Probeladungen sollen so klein sein, dass sie das zu testende elektrische Feld nicht wesentlich beeinflussen. Das heißt aber auch, dass sie sich gegenseitig nicht bemerken bzw. beeinflussen!

Der Betrag der Kraft (Pfeillänge!) bei a) ist größer als bei b), da das Feld dort stärker ist (Feldlinien sind dichter).

9. Aufgabe:

Eine elektrische Ladung befindet sich im Einflussbereich von drei anderen elektrischen Ladungen. Dadurch wirken drei Kräfte auf die Ladung, diese sind:

$$\vec{F}_1 = 3 \text{ N}(5, 7, -3)$$

$$\vec{F}_2 = 0.7 \text{ N}(2, -1, 0)$$

$$\vec{F}_3 = -6 \text{ N}(6, 0, -2)$$

Wie lautet die wirkende Gesamtkraft?

Lösung:

Um die Teilkräfte vektoriell zu addieren, muss man sie in reine Komponentenform bringen:

$$\vec{F}_1 = (15, 21, -9) \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = (1.4, -0.7, 0) \text{ N}$$

$$\vec{F}_3 = (-36, 0, 12) \text{ N}$$

Nun kann komponentenweise addiert werden:

$$\vec{F}_{ges} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (15 + 1.4 - 36, 21 - 0.7, -9 + 12) \text{ N} = (-19.6, 20.3, 3) \text{ N}$$

10. Aufgabe:

Zwei kleine, punktförmige Kugeln im Abstand $a=50$ cm tragen die jeweils positiven Ladungen $Q_1 = 10^{-7}$ C und $Q_2 = 5 \cdot 10^{-6}$ C.

Wie groß ist die Kraft F , welche die Kugeln aufeinander ausüben?

$$F = f^* \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \text{ mit der Coulombkonstanten: } f^* = k_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi} \mu_0 c^2 \approx 8,98 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

Lösung:

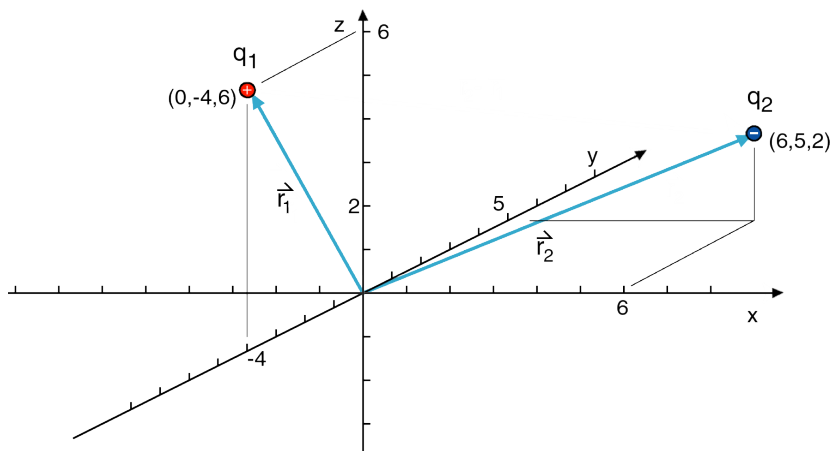
$$F = f^* \frac{Q_1 \cdot Q_2}{a^2} = 8,98 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{(0,5)^2 \text{ m}^2} = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

11. Aufgabe:

Eine Punktladung von $q_1 = +25 \mu\text{C}$ befindet sich am Ort $\vec{r}_1 = (0, -4, 6)$ m, eine zweite Punktladung von $q_2 = -30 \mu\text{C}$ befindet sich an der Position $\vec{r}_2 = (6, 5, 2)$ m. Welche Kraft wirkt zwischen den beiden Ladungen?

Die Kraft, die die Ladung q_1 auf die Ladung q_2 ausübt, wird beschrieben durch das (allgemeine) Coulombsche Gesetz:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}}$$



Lösung:

Der vordere Teil der Formel

$$\vec{F} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2}}_{\text{Skalar}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}}}_{\text{Vektor}}$$

ist eine skalare Größe (ohne Richtung) und gibt den Betrag der Kraft an:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2}$$

Der hintere Teil der Formel (nach dem Punkt) ist ein Vektor mit der Länge 1, auch Einheitsvektor genannt. Er gibt die Richtung des Kraftvektors an:

$$\frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}}$$

Dabei ist $\vec{r}_{1,2}$ der Verbindungsvektor vom Ort r_1 zum Ort r_2 . Er kann berechnet werden als Differenz der beiden Ortsvektoren:

$$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

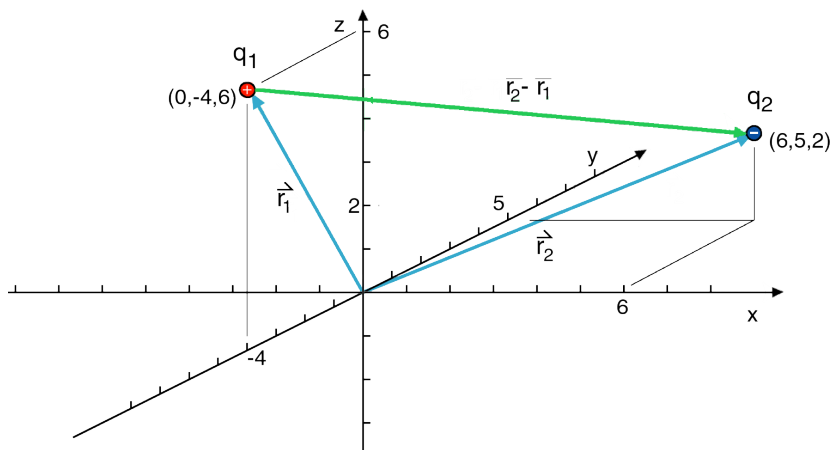
Die Größe $r_{1,2}$ ist der Betrag dieses Vektors:

$$r_{1,2} = |\vec{r}_{1,2}| = \sqrt{r_{1,2x}^2 + r_{1,2y}^2 + r_{1,2z}^2}$$

Wir wollen die Aufgabe nun so angehen, dass wir Betrag und Richtung des Ergebnisvektors zunächst separat bestimmen. Wir beginnen mit der Richtung:

$$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (6, 5, 2) \text{ m} - (0, -4, 6) \text{ m} = (6, 9, -4) \text{ m}$$

Die beiden Ortsvektoren und der Verbindungsvektor sind in folgender Abbildung dargestellt.



Der Betrag dieses Vektors ist

$$r_{1,2} = \sqrt{6^2 \text{ m}^2 + 9^2 \text{ m}^2 + (-4)^2 \text{ m}^2} = \sqrt{36 \text{ m}^2 + 81 \text{ m}^2 + 16 \text{ m}^2} = \sqrt{133 \text{ m}^2} \approx 11.532... \text{ m}$$

Der Einheitsvektor, der die Richtung der Kraft angibt ist also:

$$\frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}} = \frac{(6, 9, -2) \text{ m}}{11.5 \text{ m}} = \left(\frac{6}{11.5}, \frac{9}{11.5}, \frac{-2}{11.5} \right)$$

Nun müssen wir den Betrag der Kraft bestimmen:

$$\begin{aligned} |\vec{F}| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}} \cdot \frac{25 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot (-30) \cdot 10^{-6} \text{ C}}{133 \text{ m}^2} \\ &= -\frac{25 \cdot 30}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 133} \cdot \frac{10^{-6} \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} \cdot \frac{\text{C}^2 \text{Nm}^2}{\text{C}^2 \text{m}^2} \approx -51.482... \cdot 10^{-3} \text{ N} \end{aligned}$$

Wichtig ist das Minuszeichen! Wir können das Minuszeichen in den Richtungsvektor hinein multiplizieren, womit sich dessen Richtung umkehrt.

Das bedeutet: Die Kraft hat nicht die gleiche Richtung wie der Vektor $\vec{r}_{1,2}$, sondern genau die entgegengesetzte (antiparallele) Richtung.

Der Verbindungsvektor $\vec{r}_{1,2}$ zeigt also von q_1 zu q_2 und die Kraft $\vec{F}$, die auf q_2 ausgeübt wird, weist von q_2 zu q_1 . Dies muss auch genau so herauskommen, weil die Ladungen ja ungleichnamig sind und sich positive und negative Ladungen ja anziehen!

Endergebnis: Auf die Ladung q_2 wirkt eine Kraft von $51.48 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ in einer Richtung, die durch den Vektor $\left(\frac{-6}{11.5}, \frac{-9}{11.5}, \frac{2}{11.5} \right)$ gegeben ist.

Wir sehen jetzt den Vorteil der vektoriellen Darstellung: Die Richtung der Kraft ergibt sich automatisch richtig.