

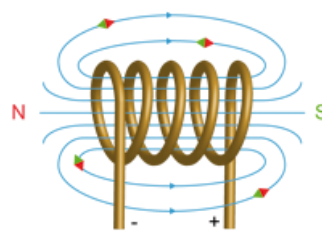
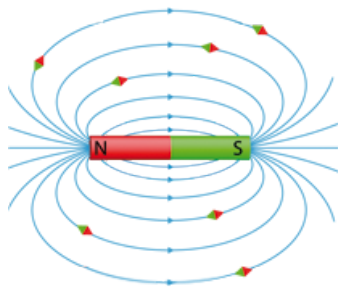
- Skript -

Einführung in die Elektrotechnik TWI23

Studiengang Wirtschaftsingenieurwesen

Prof. Dr. Stephan Sauter
Dipl. Ing. Reinhold Reichle

Q1 2025



Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
1 Grundbegriffe	2
1.1 Geschichte	2
1.2 Das internationale Einheitensystem (SI)	4
1.3 Elektrische Ladungen	7
1.4 Erzeugung elektrischer Ladungen	8
1.5 Kraftwirkungen zwischen Ladungen	10
1.5.1 Kräfte auf ruhende Ladungen	10
1.5.2 Kräfte auf bewegte Ladungen	12
1.6 Der Begriff Feld	12
1.7 Werkzeuge für den Umgang mit Vektorfeldern	16
1.7.1 Der Fluss des Vektorfeldes	16
1.7.2 Die Zirkulation eines Vektorfeldes	20
2 Der Stromkreis	21
2.1 Bewegte Ladungen	21
2.2 Elektrischer Strom	22
2.3 Elektrische Stromdichte	24
2.4 Elektrische Spannung	25
2.5 Das ohmsche Gesetz	26
2.6 Spezifischer Widerstand und Leitfähigkeit	27
2.7 Temperaturabhängigkeit	29
2.8 Arbeit und Leistung bei Gleichstrom	31
2.9 Wirkungsgrad η (eta)	32
3 Gleichstromschaltungen	33
3.1 Bezugssinn und Pfeilsysteme	33
3.2 Zweipole	34
3.3 Die Kirchhoffschen Gesetze	35
3.3.1 Das 1. Kirchhoffsche Gesetz: Knotenregel	35
3.3.2 Das 2. Kirchhoffsche Gesetz: Maschenregel	36
3.4 Serien- und Parallelschaltung von Widerständen	37
3.4.1 Serienschaltung	37
3.4.2 Parallelschaltung	38
3.5 Ersatzquellen	39
3.5.1 Ersatzspannungsquelle	39
3.5.2 Ersatzstromquelle	40
3.5.3 Spannungsteiler	41
3.6 Brückenschaltungen	42
3.7 Energieumsetzung im Schaltkreis	45

3.8	Schaltung mit nichtlinearen Zweipolen	47
4	Elektrisches Feld	49
4.1	Die elektrische Ladung und ihre Wirkung	49
4.2	Die elektrischen Feldgrößen	51
4.2.1	Elektrische Feldstärke	52
4.2.2	Elektrisches Potential	53
4.2.3	Elektrischer Fluss (Verschiebungsfluss Ψ)	55
4.2.4	Nichtleiter im elektrischen Feld	57
5	Der Kondensator	59
5.1	Definition der Kapazität	59
5.2	Kapazität des Plattenkondensators	60
5.3	Zusammenschaltung von Kondensatoren	60
5.4	Technische Ausführungen von Kondensatoren	61
5.5	Energie des geladenen Kondensators	62
5.6	Schaltverhalten von Kondensatoren	63
5.7	Schaltverhalten von RC-Glied	64
6	Magnetisches Feld	66
6.1	Allgemeines zum magnetischen Feld	66
6.2	Magnetische Feldgrößen	67
6.2.1	Magnetische Feldstärke H	68
6.2.2	Elektrische Durchflutung Θ (Theta)	69
6.2.3	Magnetische Flussdichte B	71
6.2.4	Magnetischer Fluss Φ (Phi)	73
6.3	Das magnetische Ohmsche Gesetz	73
6.3.1	Magnetische Hysterese	76
6.3.2	Anwendungen	77
6.4	Kräfte im magnetischen Feld	78
6.4.1	Stromführende Leiter im Feld	78
6.4.2	Bewegte Ladung im Magnetfeld	78
6.4.3	Kräfte zwischen parallelen Leitern	80
6.5	Induktion	81
6.6	Selbstinduktion	83
6.7	Transformator	84
6.8	Energie des magnetischen Feldes	85
6.9	Anwendungen	86
7	Wechselstromtechnik	88
7.1	Definition und Kenngrößen eines Wechselstroms	88
7.2	Effektivwert	90
7.3	Verhalten von R, L, C bei Wechselstrom	91
7.3.1	Widerstand	91
7.3.2	Kondensator	92
7.3.3	Spule	93
7.4	Zeigerdarstellung	94
7.5	Komplexe Wechselstromrechnung	101
7.6	Leistung im Wechselstromkreis	102
8	Bauelemente	104
8.1	Diode	104

8.2	Transistor	105
8.3	Operationsverstärker	107
8.4	Sensoren	107
8.4.1	E-Feld Näherungssensor	107
8.4.2	B-Feld Näherungssensor	108
8.4.3	Brandmelder	108
9	Anhang	109
9.1	Anschauliche Einführung des Flußintegrals (und Linienintegrals):	109
9.2	Maxwellgleichungen in differentieller Form	110
9.3	Widerstandscodierung	110

Vorwort

Das vorliegende Skript soll vorlesungsbegleitend dem Hörer das Abzeichnen bzw. Abschreiben der Inhalte ersparen. Falls eine Vorlesungsstunde versäumt wurde, kann der Hörer anhand des Skriptes ersehen, welcher Stoff z.B. mit einem Buch nachgeholt werden sollte.

Bei allen Betrachtungen steht eine anschauliche Darstellung im Vordergrund. Es soll versucht werden, dem Leser Hinweise zu geben, die ihm bei der Lösung der anstehenden Probleme nützlich sind.

Insbesondere wird darauf hingewiesen, dass für die Prüfung das selbständige Lösen der Übungsaufgaben empfohlen wird!

Vorlesungsinhalt:

- Hagmann, Gert; Grundlagen der Elektrotechnik; Aula Verlag; 2017
- Weißgerber, Wilfried; Band 1; Gleichstromtechnik und Elektromagnetisches Feld; Vieweg
- Hering, Bressler, Gutekunst; Elektronik für Ingenieure, VDI Verlag

Musterlösungen für die Übungsaufgaben, Formelsammlungen und Skript:

- www.Freiwilligschlauwerden.de



Weitere Übungsaufgaben:

- Hagmann, Gert; Aufgabensammlung zu den Grundlagen der Elektrotechnik; Aula Verlag; 2017

KAPITEL 1

Grundbegriffe

1.1 Geschichte

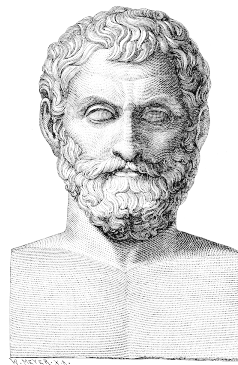
Masse kann gesehen, gefühlt, ertastet, etc. werden. Für die elektrische Ladung existiert keine direkte Beobachtungsmöglichkeit, wir erkennen ihre Existenz nur indirekt durch die Wirkungen, die sie verursacht.

Diese Wirkungen sind essentiell für das Leben auf unserer Erde, z.B.

Nervenleitung:	Menschlicher Körper, Nervenleitung über Synapsen
Fische:	Orientierung, Jagd (südamerikanische Zitteraal: 600 V, 1 A)
Wale:	Erdmagnetfeld
Handy:	drahtlose Nachrichtenübermittlung (elektromagnetische Wellen)
Elektromotor:	Beispiel für elektrische Maschinen
Elektrische Geräte:	...

Die Wirkung der elektrischen Ladung war bereits den Griechen bekannt (ohne dass von ihnen die Ursache dafür erkannt wurde).

Geriebener Bernstein zieht kleine Gegenstände an (Thales von Milet, 625 v. Chr.-547 v.Chr.)



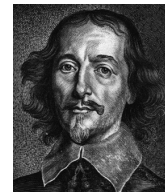
Es war der Ursprung der Entdeckung der Elektrizität („elektron“ ist das griechische Wort für „Bernstein“).

Anfänge:

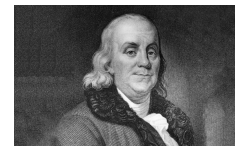
William Gilbert (1544-1603): Leibarzt der Königin Elisabeth I., sein Meisterwerk, "De Magnete" erschien im Jahre 1600 in London, in dem er die Erscheinungen des Magnetismus darlegt. In diesem Werk wird die Erde selbst als großer Magnet beschrieben.



Otto von Guericke (1602-1686): Der Magdeburger Bürgermeister ist noch heute bekannt durch sein Buch "Neue Magdeburger Versuche über den leeren Raum". Er sieht die an der Schwefelkugel beobachteten anziehenden (elektrischen) Kräfte auch als Ursache für die beschriebenen anziehenden Kräfte im Kosmos.

**Coulombgesetz:**

Benjamin Franklin (1706-1790): Mitschöpfer der amerikanischen Verfassung. Seine Experimente mit Reibungselektrizität führen zur Entdeckung der Spitzenwirkung. Franklin wird als Erfinder des Blitzableiters (1747) berühmt.



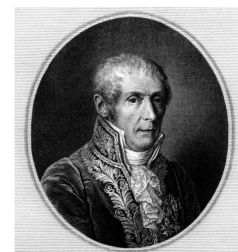
Charles Augustin de Coulomb (1736-1806): Der französische Ingenieur veröffentlichte 1784 das Gesetz für die Torsion eines dünnen Drahtes, dass der Auslenkungswinkel proportional zum wirkenden Drehmoment und umgekehrt proportional zur vierten Potenz des Drahtdurchmessers ist und konstruierte eine empfindliche Drehwaage. Mit diesem Gerät gelang ihm 1785 der Nachweis des "quadratischen Abstandsgesetzes" für die Abstoßungskraft von Ladungen.



Luigi Galvani (1737-1798): Der Professor der Anatomie in Bologna entdeckte 1780, dass die Schenkel eines seziierten Frosches zu zucken begannen, wenn eine Elektriziermaschine in der Nähe betätigt wurde.



Allessandro Volta (1745-1827): Volta, Professor für Physik in Pavia, hörte 1792 von Galvanis Experimenten und stellte eigene Versuche mit der von verschiedenen Metallen ausgehenden Elektrizität an. Anhand der Intensität der Geschmacksempfindung, die verschiedene Metallkombinationen an seiner Zunge hervorrufen, kann er die Metalle in eine Spannungsreihe einordnen. 1799 stellt er seine bedeutendste Erfindung, die Voltasäule, den Urtyp aller elektrischen Batterien, vor.



André-Marie Ampère (1775-1836) war ein französischer Physiker und Mathematiker. Er war der herausragende Experimentator und Theoretiker der frühen Elektrodynamik. Nach ihm ist die internationale Einheit der Stromstärke Ampere benannt.



1.2 Das internationale Einheitensystem (SI)

In Deutschland wurde das SI-System 1970 gesetzlich eingeführt.

- Übergangszeiten galten bis 1977.
- Die abgeleiteten Einheiten - z.B. die Geschwindigkeit in m/s - werden mit Hilfe der Basiseinheiten und einer Definitionsgleichung (z.B. Geschwindigkeit = Wegänderung pro Zeitänderung bzw. $v = \frac{ds}{dt}$) gebildet.

Die sieben Basiseinheiten (prinzipielle Bedeutung):

die Länge 1 m (Meter)	$\hat{=}$	der Strecke des Lichtes im Vakuum in $\approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-8}$ s (früher: das Urmeter)
die Masse 1 kg (Kilogramm)	$\hat{=}$	basierend auf der Planck-Konstanten (z.B. Siliziumkugel) (früher: das Urkilogramm, 1 dm ³ Wasser bei ca. 4 °C)
die Zeit 1 s (Sekunde)	$\hat{=}$	der Periodendauer der Strahlung von Cäsium 133 vervielfacht um ca. $9 \cdot 10^9$
die Stromstärke 1 A (Ampere)	$\hat{=}$	der Kraftwirkung zwischen zwei parallelen stromdurchflossenen Drähten bei 1 m Abstand. Die Kraft beträgt: $2 \cdot 10^{-7}$ kgm/s ² = $2 \cdot 10^{-7}$ N.

Für die **Elektrotechnik** sind Länge, Masse, Zeit und Stromstärke von besonderer Bedeutung.

die Temperatur 1 K (Kelvin)	$\hat{=}$	absoluter Nullpunkt bei 0 K = -273,16 °C (gleichmäßige Teilung)
die Lichtstärke 1 cd (Candela)	$\hat{=}$	1/60 der Lichtstärke von 1 cm ² Oberfläche eines schwarzen Körpers bei der unter Normaldruck vorliegenden Erstarrungstemperatur von Platin.
die Stoffmenge 1 mol (Mol)	$\hat{=}$	der Menge eines Stoffes, die so viele Teilchen enthält wie 12 g des Nuklids ¹² C. Die Teilchenzahl beträgt $6.024 \cdot 10^{23}$.

Von den definierten SI-Basiseinheiten können Einheiten für jede physikalische Größen abgeleitet werden.

Abgeleitete Einheiten mit dem Zahlenfaktor 1 sind **kohärent** zueinander.

Z.B. die Überführbarkeit von mechanischer Energie in elektrische und umgekehrt.

Kilogramm Definition:

Nur das **Kilogramm**, (Zylinder aus Platin-Iridium-Legierung) war bisher nicht von den Basiseinheiten der Naturkonstanten abgeleitet, bzw. über Naturkonstanten definiert.

Bei der Generalkonferenz für Maß und Gewicht am 16. November 2018 in Paris wurde beschlossen, dass das Kilogramm (neben den Einheiten Ampere, Kelvin und Mol) ab dem **20. Mai 2019** auf Basis der Planck-Konstanten ($6.626070040 \cdot 10^{-34}$ Joulesekunden (Js)) definiert wird.

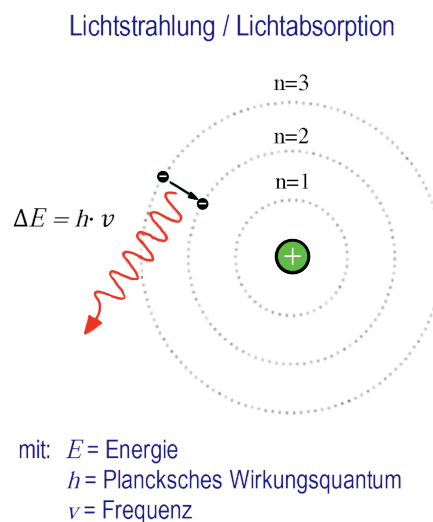
Sämtliche SI-Definitionen ab 2018 lassen offen, in welcher Form oder mit welchen experimentellen Methoden die Realisierung der Einheit umgesetzt wird.

Sowohl die Avogadro-Methode (Siliziumkugel, $\varnothing 9.37 \text{ cm} \pm 15 \text{ nm}$) als auch die Watt-Waage können somit als Methode zur Realisierung der Einheit Kilogramm verwendet werden.

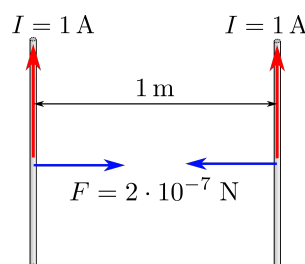
Beispiel 1: Definition Sekunde:

Die Sekunde ist das 9.192.631.770-fache der Periodendauer der entsprechenden Strahlung, die beim Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nukleids ^{133}Cs entsteht.

Man versteht unter Hyperfeinstruktur die Aufspaltung der Energieniveaus eines Atomes.

**Beispiel 2: Definition Ampere:**

Das Ampere ist die Stärke eines konstanten Stroms, der durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leitungslänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorrufen würde.



Rechnen im SI-System:

Jede Größe wird als Produkt aus Zahlenwert und Einheit dargestellt.

$$\text{Physikalische Größe} = \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit}$$

$$G = \{G\} \cdot [G]$$

$$U = 24 \text{ V}$$

| | |
physikalische Größe | Zahlenwert | Einheit

Abgeleitete Einheiten werden mittels Definitionsgleichungen definiert:

- Kraft F in Newton (N)
 a : Beschleunigung
 m : Masse

$$F = m \cdot a \Rightarrow$$

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- Arbeit W in Joule (J)
 s : Weg

$$W = F \cdot s \Rightarrow$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}$$

- Leistung P in Watt (W)
 t : Zeit

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow$$

$$1 \text{ W} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ s}}$$

- Spannung U in Volt (V)
 I : Strom

$$U = \frac{P}{I} \Rightarrow$$

$$1 \text{ V} = \frac{1 \text{ W}}{1 \text{ A}}$$

- Widerstand R in Ohm (Ω)

$$R = \frac{U}{I} \Rightarrow$$

$$1 \Omega = \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A}}$$

Hinweise:

- Größen als Produkt aus Zahlenwert und Einheit einsetzen
- Umrechnungsfaktoren mit Einheiten des SI-Systems verwenden
- Zehnerpotenzschreibweise verwenden
- Einheitenkontrolle durch Überprüfung der Dimensionsgleichung durchführen

Beispiel: Berechnung der Leistung:

gegeben: $U = 220 \text{ V}$, $R = 100 \Omega$

$$P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R} = \frac{(220 \text{ V})^2}{100 \Omega} = \frac{2,2^2 \cdot 10^4 \text{ V}^2}{10^2 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 484 \text{ VA} = 484 \text{ W}$$

1.3 Elektrische Ladungen

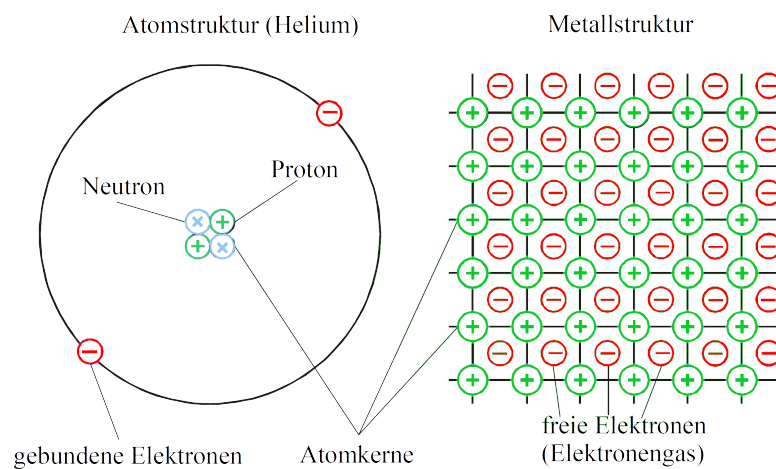
Ladungsträger:

Elektron + Proton mit Elementarladung $\pm e = \pm 1.602 \cdot 10^{-19}$ As (Coulomb)

$$\begin{array}{lcl} \text{SI-System:} & 1 \text{ Coulomb} & = 1 \text{ Ampere} \cdot 1 \text{ Sekunde} \\ & \text{Ladung} & = \text{Strom} \cdot \text{Zeit} \end{array}$$

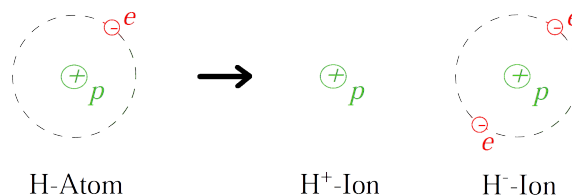
Protonen + Neutronen (neutral) bilden positive Atomkerne,
Elektronen bilden die negative Hülle.

Bei gleich vielen Protonen und Elektronen $\rightarrow$ neutrale Atome ("neutrales Universum")



- Leitungselektronen sind freie Elektronen.
- Die Elektronenkonzentration n (20°C) beträgt in
 - Metallen $10^{21} \dots 10^{23} / \text{cm}^3$,
 - Halbleitern $10^{11} \dots 10^{15} / \text{cm}^3$,
 - Isolatoren $< 10^{10} / \text{cm}^3$.
- Ionen sind bewegliche Materieteilchen mit elektrischer Ladung in Flüssigkeiten und Gasen. Ihre Ladung entsteht durch fehlende oder überzählige gebundene Elektronen.

Wenn im Atom Elektronen fehlen oder überzählig sind spricht man von **Ionen**.



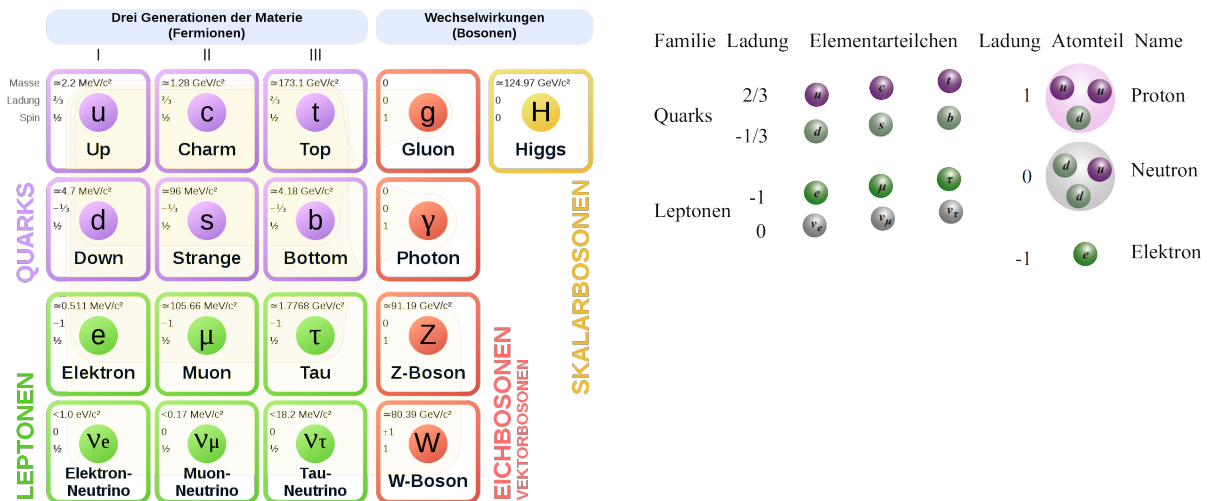
In der Elektrotechnik von praktischer Bedeutung:

- Elektronenströme (Metalle, Halbleiter, Vakuumröhren)
- Ionenströme (Flüssigkeiten, Gase, Schmelzen)
- Löcher (Halbleiter)

Der Aufbau von Materie ist komplizierter und es gibt in der Quantenphysik neben den Elektronen noch weitere Elementarteilchen mit und ohne Ladung:

Fermionen (Materieteilchen): Quarks und Leptonen sowie Bosonen (Austauschteilchen)

Standard-Modell der Elementarteilchen



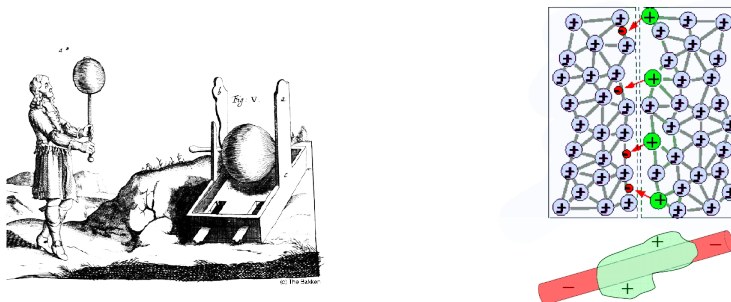
In der Elektrotechnik kann es allerdings nur Ladungsmengen Q geben, die ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung $\pm e$ betragen, also

$$Q = n \cdot e$$

Beweis: Millikan Versuch (Bestimmung der Elementarladung, 1910)

1.4 Erzeugung elektrischer Ladungen

Durch enge Berührung (Reibung) von zwei unterschiedlichen Nichtleitern werden Elektronen von den Atomen des einen gelöst. Diese Atome werden somit **ionisiert** und haften, weil energetisch günstiger, an Plätzen zwischen den Atomen des anderen. Man erhält zwei Isolatoren mit einem Überschuss an Elektronen auf der Oberfläche des einen, und einem Defizit an Elektronen, d.h. einem Überschuss an positiven Ionen, auf der Oberfläche des anderen.

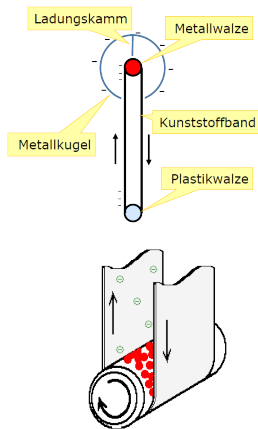
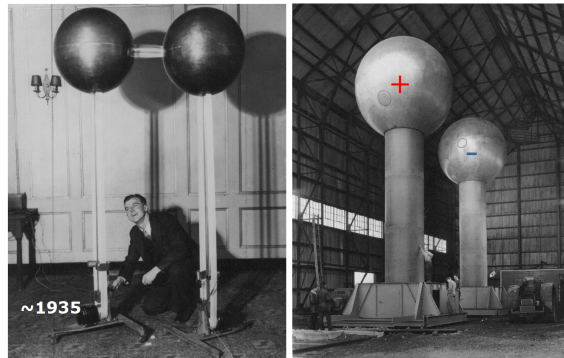


Otto von Guericke (1663): Schwefelkugel auf Tuch

<----- negativer ----->		----- positiver ----->	
Bernstein	Schwefel	Lack	Seide – Baumwolle – Glas – Elfenbein – Katzenfell

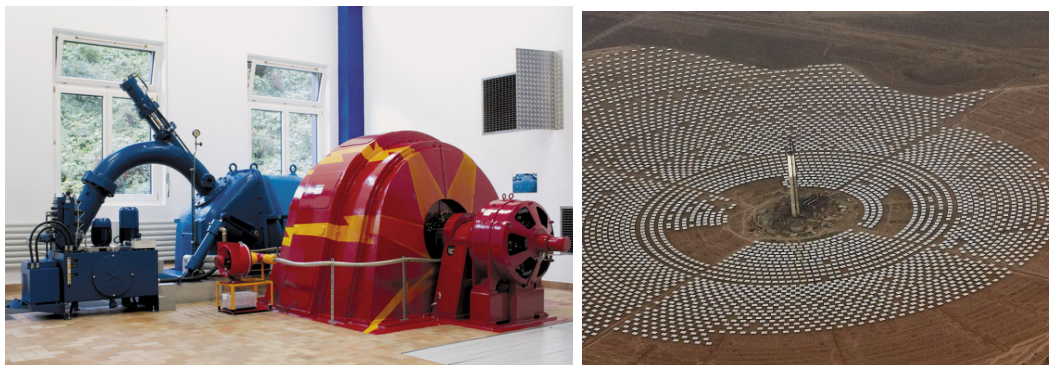
Van de Graaff Generator:

Durch Reibung an einer Erregerwalze wird auf dem Band meist negative Ladung erzeugt (Robert J. van de Graaff, 1931).

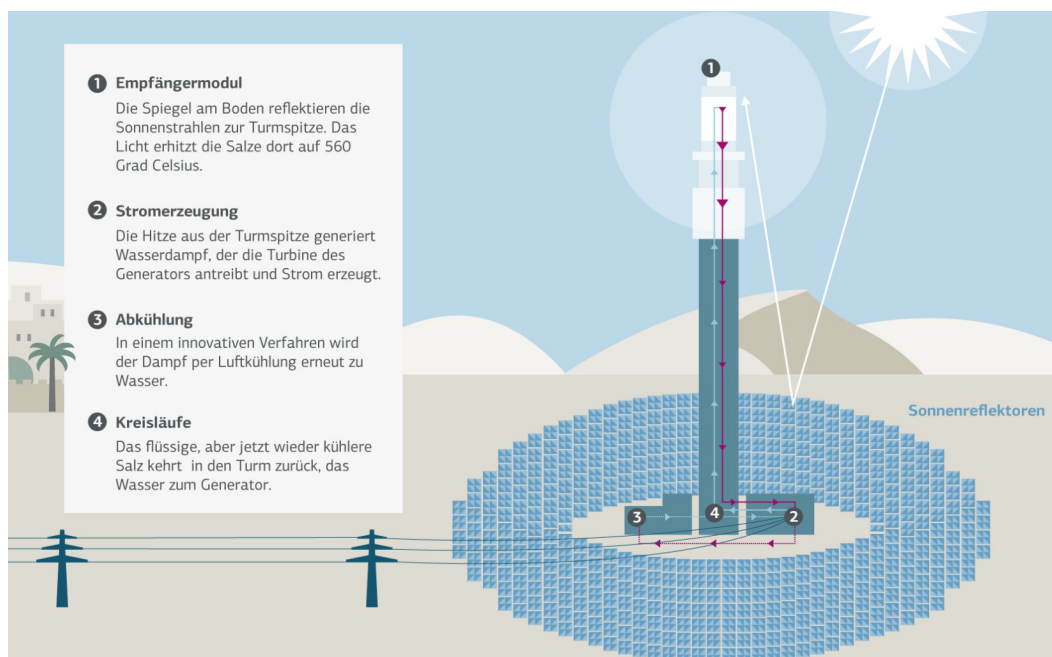


Turbinen und Generatoren

Heute wird hauptsächlich die Elektromagnetische Wirkung (Lorentzkraft) für die zentrale Erzeugung von elektrischem Strom verwendet. Dies kann mit Wasser (Wasserkraftwerk) oder Wasserdampf (z.B. Solarkraft, AKW...) erfolgen.



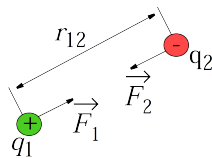
Wasserkraftwerk, Solarkraftanlage in Marokko (400°C heißes Salz-Öl erzeugt Wasserdampf)



1.5 Kraftwirkungen zwischen Ladungen

1.5.1 Kräfte auf ruhende Ladungen

elektrostatische Kräfte $F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \sim \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2}$



Ähnlich wie Gravitation $F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \sim \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2}$

jedoch bei elektrischen Ladungen:

- zwei Arten von Ladung (+ und -)
- ungleiche Ladungen ziehen sich an, gleiche stoßen sich ab
- Kräfte viel, viel ... viel größer als bei Gravitation.

Beispiel:

Verhältnis der beiden Kräfte zwischen zwei Protonen im selben Abstand, mit der Coulomb-Konstanten $f^* = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ und der Gravitations-Konstanten G :

$$\frac{\text{Coulombkraft}}{\text{Gravitation}} = \frac{f^* \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}}{G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}} = \frac{f^* \cdot e^2}{G \cdot m_p^2} = \frac{8.98 \cdot 10^9 \cdot \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot (1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2}$$

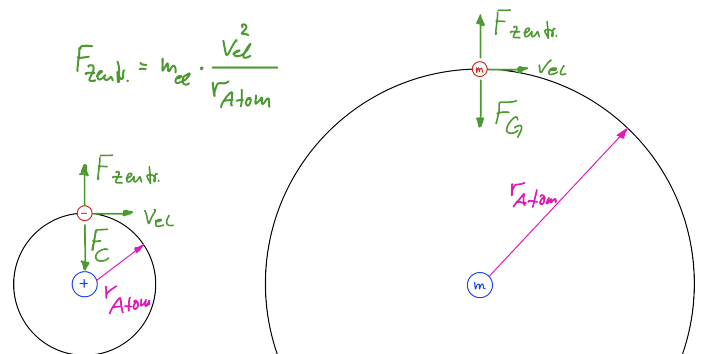
$$\approx \frac{10^{10}}{7 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-54}} \approx 1.2 \cdot 10^{36}$$

Anders ausgedrückt für Proton und Elektron:

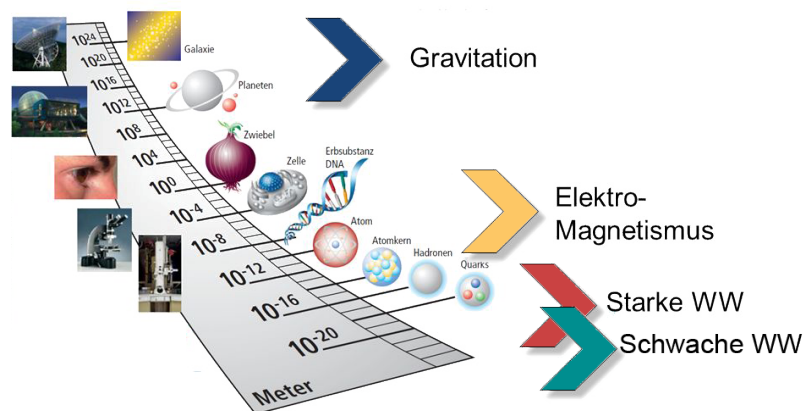
Würde das Atom nur durch die Gravitationsanziehung zwischen Proton und Elektron bei gleicher Umlaufgeschwindigkeit v_{el} ($\approx 2200 \frac{\text{km}}{\text{s}} \hat{=} \frac{1}{100} c$) zusammenhalten, wäre der Abstand zwischen beiden $r_{Atom} \approx 1.27 \cdot 10^{13}$ Lichtjahre (real: $\tilde{r}_{Atom} \approx 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$).

Das Kräfteverhältnis $\frac{F_C}{F_G}$ für:

Proton - Proton:	$1.2 \cdot 10^{36}$
Proton - Elektron:	$2.3 \cdot 10^{39}$
Elektron - Elektron:	$4.2 \cdot 10^{42}$

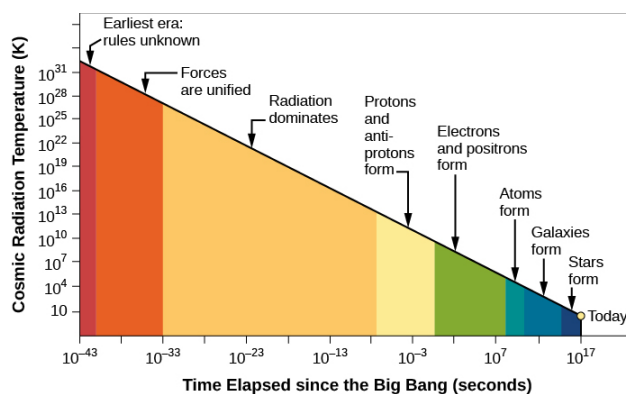
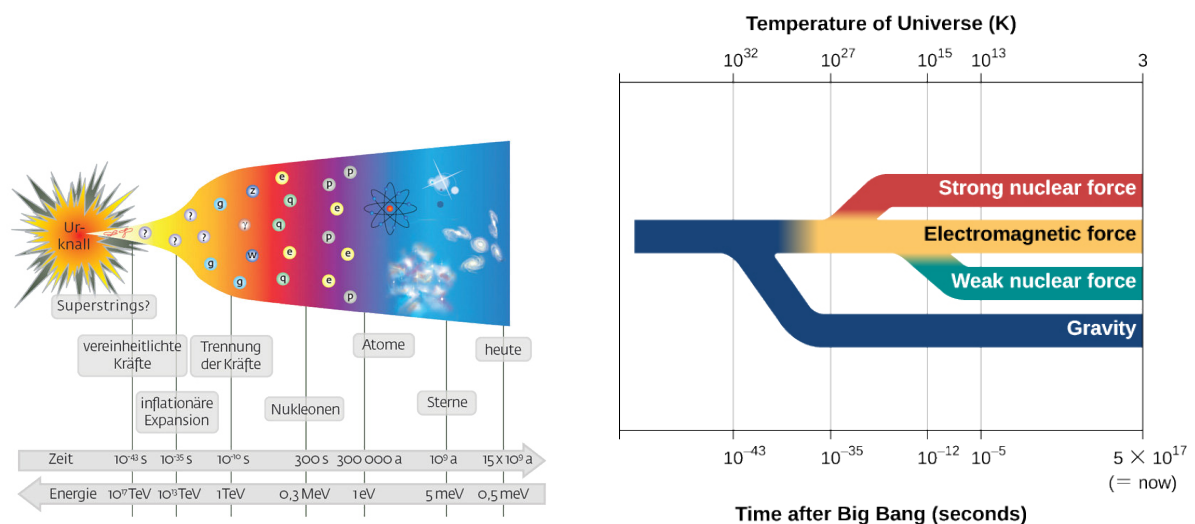


Aufbau der Materie und deren Wechselwirkungen: Vom Großen zum Kleinen:



Das Gleichgewicht zwischen positiven und negativen Ladungen ist im Universum sehr gut austariert → Ausgleich fand bereits im frühen Entstehungszeitpunkt des Universums statt.

Bei Ungleichgewicht wird Ausgleich durch Ströme angestrebt.



Kraft	relative Stärke	Bosonen	Masse [GeV/c ²]	Reichweite [Meter]
Stark	1	8 Gluonen	0	$2,5 \times 10^{-16}$
E.M.	10^{-2}	Photon	0	∞
Schwach	10^{-13}	W^-, W^+, Z^0	80,80,91	10^{-18}
Gravitation	10^{-38}	Graviton?	0	∞

Man geht nach heutiger Forschung davon aus, dass sich durch das immer schneller expandierende Universum alles in etwa 10^{100} Jahren in die Elementarteilchen aufgelöst haben wird. Dass sich also z.B. Elektronen von ihren Kernen lösen und sich im Universum gleichverteilen (Zustand höchster Entropie).

Beispiele für elektrostatische Kräfte:

- Elektron/Atomkern
- Molekülkräfte
- Abstoßende Kräfte zwischen Protonen?
(Faust: Was ist es, was die Welt im Innersten zusammenhält?)
- Was hält das Elektron auf seiner Bahn um den Kern?
⇒ Dualismus Welle & Teilchen, Quantenmechanik

1.5.2 Kräfte auf bewegte Ladungen

Diese Kräfte heißen elektromagnetische Kräfte. Sie hängen in komplizierter Weise von der Ladung und deren Bewegung im 3-Dimensionalen Raum ab.

Frage: Gibt es eine Chance, die Kräfte zwischen vielen, evtl. bewegten Ladungen nach Betrag und Richtung auszurechnen?

Antwort: Ja, wenn man den Begriff Feld einführt.

1.6 Der Begriff Feld

Die Kraft auf eine Ladung q ist gegeben durch

- die Größe (Menge) der Ladung q
- die Geschwindigkeit der Ladung q
- das elektrische Feld am Ort von q
- das magnetische Feld am Ort von q

Die Kraft $\vec{F}$ auf eine Ladung q wird beschrieben durch die sogenannte:

Lorentz-Beziehung

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.1)$$

Wir interessieren uns also für die Kraft auf eine der vielen Ladungen, also für die Kraft auf q . Der Einfluss aller anderen Ladungen lässt sich zusammenfassen zu:

- einem Vektor $\vec{E}$ am Ort der Ladung q und
- einem Vektor $\vec{B}$ am Ort der Ladung q

Kennt man die Vektoren und am Ort der untersuchten Ladung q , so kennt man die Kräfte, die die Ladung q in Bewegung setzen wollen, also die Ursache für den Strom.

Neue Frage:

Wie berechnet man die Vektoren am Ort der Ladung q bei einer komplizierten Verteilung der restlichen Ladungen?

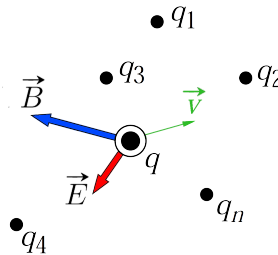
Antwort:

Es gilt das Superpositionsprinzip (Überlagerungsprinzip), eines der wichtigsten vereinfachenden Prinzipien der Physik.

Es gilt:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \dots + \vec{B}_n$$



Bei unserer bisherigen Betrachtung diente $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nur zur Beschreibung der Kraftwirkungen aller anderen Ladungen auf die eine betrachtete Ladung q .

- Die Kraftwirkung hängt nur von der Verteilung aller anderen Ladungen ohne q ab
- Es wurde vorausgesetzt, dass die Verteilung aller anderen Ladungen nicht dadurch beeinflusst wird, an welchem Ort sich q befindet

Frage:

Was bleibt am Ort (x,y,z) der betrachteten Ladung q , wenn man diese wegnimmt?

Antwort:

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ am Ort (x,y,z) der weggenommenen Ladung bleiben unverändert. Man kann also an jedem Ort (x,y,z) $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ausrechnen bzw. messen.

Definition:

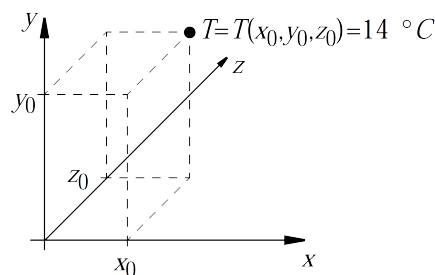
Eine Größe, die man an jedem Punkt des Raumes (x,y,z) berechnen bzw. messen kann, heißt Feld. Ein Feld ist also eine Funktion des Ortes (x,y,z) , eventuell auch eine Funktion der Zeit t .

Man schreibt deshalb:

$$\vec{E} = \vec{E}(x,y,z) \text{ bzw. } = \vec{E}(x,y,z,t) \text{ und}$$

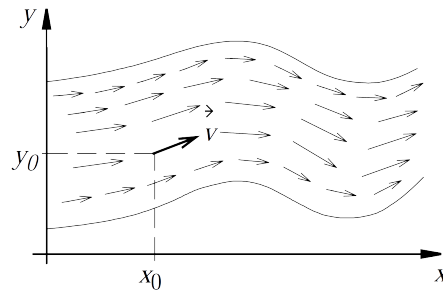
$$\vec{B} = \vec{B}(x,y,z) \text{ bzw. } = \vec{B}(x,y,z,t)$$

Beispiel: Temperaturfeld (skalares Feld):



Es gibt eine skalare Funktion $T = T(x,y,z)$. Sie hat für den Punkt (x_0,y_0,z_0) den Wert $T = T(x_0,y_0,z_0) = 14\text{ °C}$. T kann eventuell von der Zeit t abhängen, also $T = T(x,y,z,t)$.

Beispiel: Geschwindigkeitsfeld (Vektorfeld):

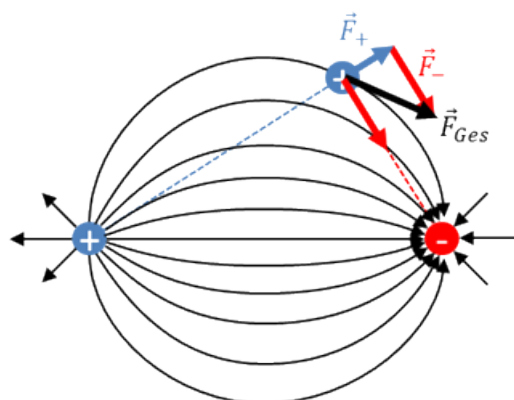


Es gibt eine Vektorfunktion $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$. Diese Geschwindigkeitsfunktion $\vec{v}$ hat z.B. an der Wasseroberfläche $z_0 = 0$ und am Ort (x_0, y_0, z_0) den Wert $\vec{v} = (x_0, y_0, 0) = (0.5 \text{ m/s}, 0.1 \text{ m/s}, 0 \text{ m/s})$. $\vec{v}$ kann eventuell von der Zeit t abhängen, also $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$.

Regeln für Feldlinien

Feldlinien sollen ein intuitives Bild der Stärke und Richtung eines Feldes im zwei bzw. dreidimensionalen Raum geben.

- Die Richtung der **Tangente** an die elektrische Feldlinie in einem Punkt ist identisch zu der Richtung der Kraft, die in diesem Punkt durch das Feld auf eine positive Punktladung ausgeübt wird.
- Die Intensität der Feldlinien (= Anzahl der Feldlinien pro Fläche dA senkrecht zum Feld) ist **proportional** zur Stärke der Kraft, die durch das elektrische Feld auf eine Punktladung ausgeübt wird.
- Im Falle von statischen Ladungen: Elektrische Feldlinien beginnen immer an den positiven Ladungen und enden an den negativen Ladungen.
- Elektrische Feldlinien **kreuzen sich nicht**, d.h. das elektrische Feld ist in jedem Punkt des Raums eindeutig, denn gäbe es einen Kreuzungspunkt, so erhielte man zwei unterschiedliche Feldstärken.



An der gewählten Stelle ist der Abstand der Testladung von der positiven Ladung größer als von der negativen Ladung. Deshalb ist die abstoßende Kraft (blauer Pfeil) weniger lang als die anziehende Kraft (roter Pfeil). Die resultierende Kraft (dicker schwarzer Pfeil) ist die Tangente an der Feldlinie. Sie gibt die Richtung des Felds an dem Punkt an, an dem die blaue Testladung sich befindet.

Überlagerung zweier Felder:

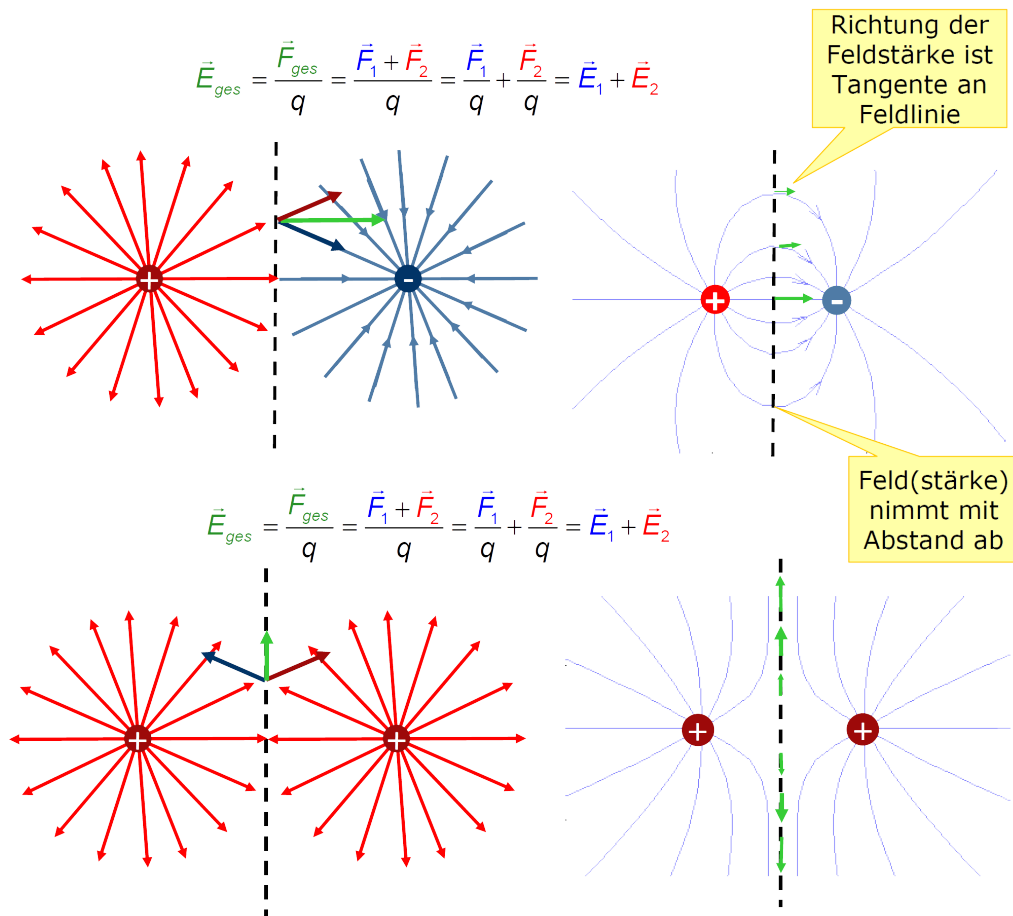
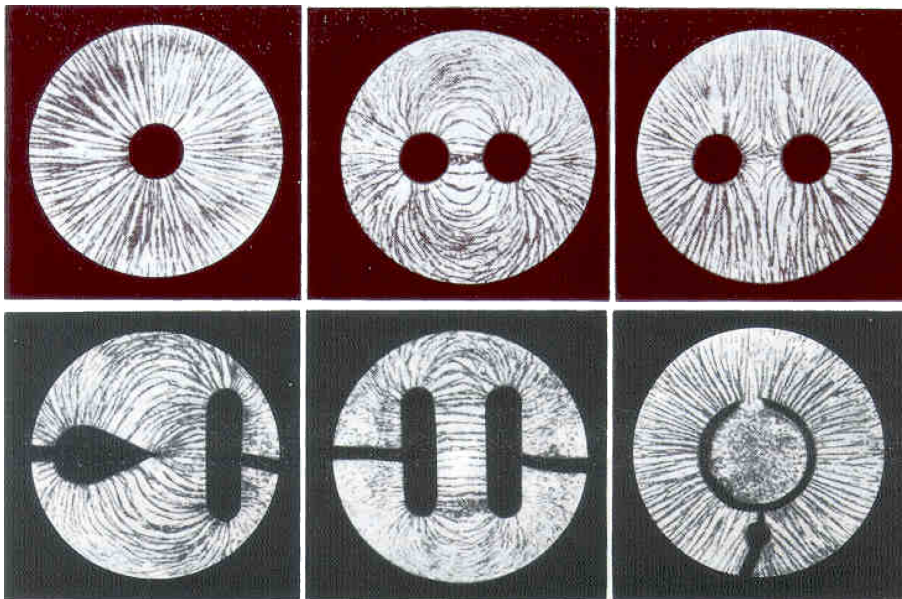


Illustration der Feldlinien:



1.7 Werkzeuge für den Umgang mit Vektorfeldern

1.7.1 Der Fluss des Vektorfeldes

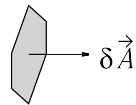
Gedankenversuch:

Wir setzen eine Fläche aus Maschendraht in strömendes Wasser, also in ein Strömungsfeld $\vec{v}$.

Frage:

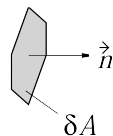
Welche Wassermenge fließt pro Zeit durch diese Fläche im Strömungsfeld $\vec{v}$ (Fluss) ?

Zunächst eine Masche mit Fläche δA .



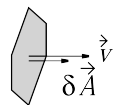
Da eine Fläche eine Größe δA und eine Orientierung im Raum hat, die man mit der Richtung eines auf der Fläche senkrechten Vektors $\vec{n}$ (Flächennormale, Länge 1) angeben kann, ist sie beschrieben durch den Vektor mit

$$\delta \vec{A} = \vec{n} \cdot \delta A$$



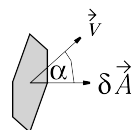
Bei Strömung $\vec{v}$ senkrecht zur Fläche, d. h. $\vec{v} \parallel \delta \vec{A}$, ist dann die Menge pro Zeit

$$Fluss = \frac{Menge}{Zeit} = \Psi \text{ (Psi)} = \vec{v} \cdot \delta \vec{A}$$

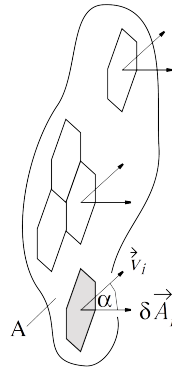


Bei Strömung $\vec{v}$ in beliebiger Richtung zur Fläche $\delta \vec{A}$ wird die Menge pro Zeit ebenfalls durch das innere Produkt $\vec{v} \cdot \delta \vec{A}$ richtig beschrieben.

$$\Psi = \vec{v} \cdot \delta \vec{A} = |\vec{v}| \cdot |\delta \vec{A}| \cdot \cos(\alpha)$$



Der Fluss durch die *gesamte* Fläche $\sum A_i$ ergibt sich durch Aufsummieren der Teilflüsse durch alle Maschen i .



Durch die i -te Masche fließt $\Psi_i = \vec{v} \cdot \delta \vec{A}_i$

insgesamt fließt

$$\Psi = \sum_i \Psi_i = \sum_i \vec{v}_i \cdot \delta \vec{A}_i$$

und bei unendlich kleinen Maschen geht die Summe in ein Integral über. Der Fluss wird dann beschrieben durch:

$$\Psi = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A} \text{ oder } \Psi = \iint_A \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Es werden in dieser Vorlesung nur zwei Spezialfälle berechnet:

1. Spezialfall 1:

$\vec{v} \parallel d\vec{A}$ und $v = \text{const.}$

d. h. Vektor $\vec{v}$ steht im gesamten Integrationsgebiet A senkrecht auf der Oberfläche ($\alpha = 0^\circ$).

Dann ist

$$\vec{v} \cdot d\vec{A} = v \cdot dA \cdot \cos(\alpha) = v \cdot dA$$

und weil $v = \text{const.}$ auf A ist, ist

$$\int_A \vec{v} d\vec{A} = v \cdot \int_A dA.$$

Weil die Summe aller Flächenelemente des Gebiets eben gerade die Fläche des Gebiets ergibt, ist $\int_A dA = A$

also: $\int_A v d\vec{A} = v \cdot A$ für $\vec{v} \parallel \vec{A}$ und $v = \text{const.}$ auf A

2. Spezialfall 2:

$$\vec{v} \perp d\vec{A} = v \cdot dA \cdot \cos(\alpha) = 0$$

d. h. der Vektor v liegt im gesamten Integrationsgebiet A in der Oberfläche ($\alpha = 90^\circ$).

Dann ist

$$\vec{v} \cdot d\vec{A} = v \cdot dA \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$\text{also: } \int_A \vec{v} d\vec{A} = \mathbf{0} \text{ f\"ur } \vec{v} \perp \vec{A}$$

Häufig interessiert man sich für den Fluss durch geschlossene Hüllflächen A .

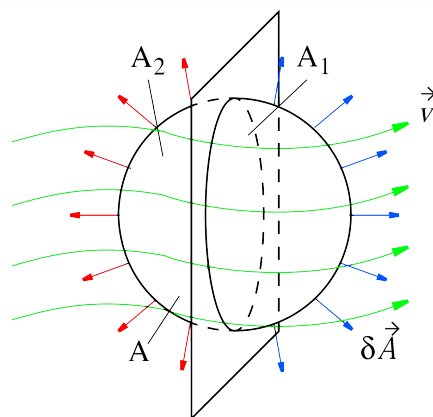
Vereinbarung: Flächennormale $\vec{n}$, und damit der Vektor $d\vec{A}$ jeder Masche zeigt immer nach außen.

Der Fluss eines Vektorfeldes $\vec{v}$ durch eine geschlossene Fläche A zeigt also an, ob sich in A eine

- Quelle befindet, oder eine
- Senke, oder ob ganz einfach
- durchflossen wird

Beispiel: Kasten aus Maschendraht im Strömungsfeld $\vec{v}$:

a) Fluss durch eine geschlossene Hüllfläche ohne Quelle :



$$\int_A dA = \int_{A_1} dA + \int_{A_2} dA$$

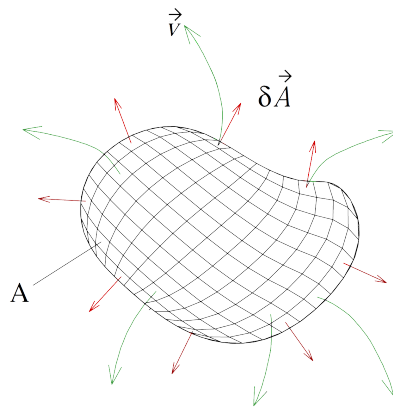
$$\Psi_1 = \int_{A_1} \vec{v} \cdot d\vec{A};$$

$$\Psi_2 = \int_{A_2} \vec{v} \cdot d\vec{A} = -\Psi_1;$$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = \oint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Fluss ohne Quelle}$$

Durch den Ring im Integral wird angedeutet, dass das Integrationsgebiet eine *geschlossene Hüllfläche* ist.

b) Fluss durch eine geschlossene Hüllfläche mit Quelle:



$$\Psi = \oint \vec{v} \cdot d\vec{A} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Fluss mit Quelle}$$

Beispiele:

Darstellung der Vektorfelder anhand ausgewählter Punkte. Die Vektoren sind als Pfeile dargestellt, welche Richtung und Betrag (Pfeillänge) wiedergeben.

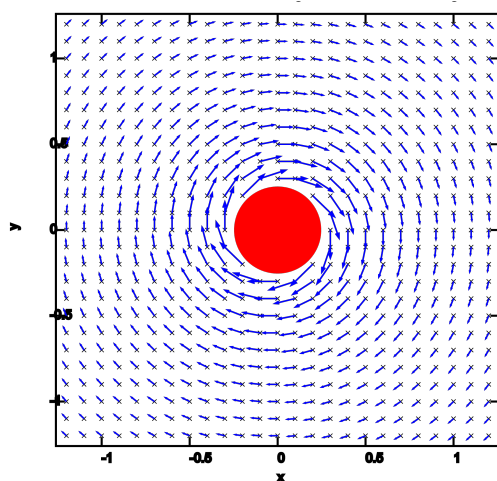


Bild 1.1: 2-Dimensionales Vektorfeld: Magnetische Feldstärke eines geraden stromdurchflossenen Leiters

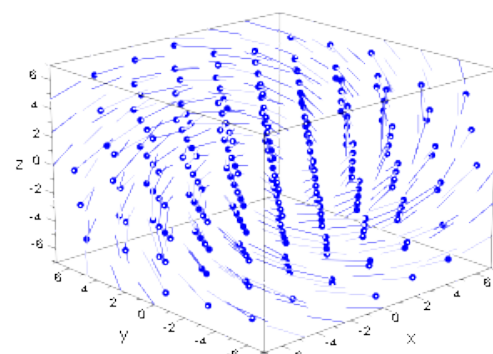


Bild 1.2: 3-dimensionales Vektorfeld

1.7.2 Die Zirkulation eines Vektorfeldes

Eine Ladung werde von Punkt 1 zum Punkt 2 bewegt. Die Arbeit hängt in diesem Fall vom Weg ab.

- Arbeit längs des Weges 1 ist positiv
- die Arbeit längs des Weges 2 ist negativ.

Das geschlossene Linienintegral von Punkt 1 über Punkt 2 nach Punkt 1 damit von Null verschieden. Der Wert des Linienintegrals längs einer geschlossenen Kurve C heißt **Zirkulation**.

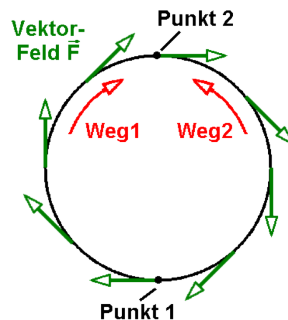


Bild 1.3: Das geschlossene Linienintegral von Punkt 1 über Punkt 2 nach Punkt 1 damit von Null verschieden. Der Wert des Linienintegrals längs einer geschlossenen Kurve C heißt Zirkulation.

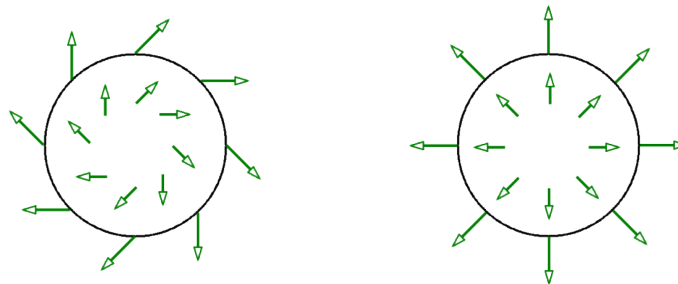
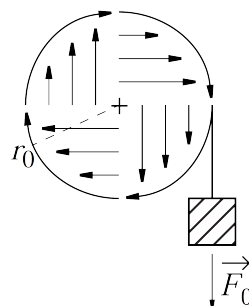


Bild 1.4: Die Zirkulation ist längs des Kreises für das Feld links im Bild existent, für das Radial-Feld rechts jedoch gleich Null. Die Zirkulation stellt einen mittleren Wert für die Wirbelhaftigkeit in dieser Fläche dar.

Beispiel:

Eine Seiltrommel als anschauliches Vektorfeld.



Man kann an jedem Punkt der Trommel die Kraftrichtung und Größe der Kraft messen.

Vektorfeld: $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ bzw. in Zylinderkoordinaten: $\vec{F} = \vec{F}(r, \varphi, z)$

KAPITEL 2

Der Stromkreis

2.1 Bewegte Ladungen

Bei nicht homogener Verteilung positiver und negativer Ladung:

Aufbau eines elektrischen Feldes $\vec{E}$.

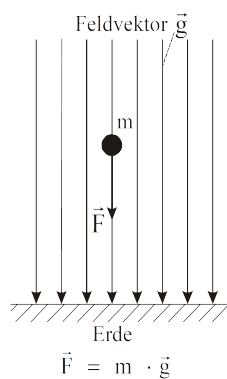
Kraft $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ auf jede Ladung q

Wenn ein leitender Verbindungsweg vorhanden ist, kann der Ausgleich durch Bewegung der Ladung stattfinden.

Antriebskraft (elektromotorische Kraft, EMK) für Ausgleichsvorgang ist vorhanden.

Beispiel 1: Betrachtung der Analogie zum Gravitationsfeld:

Gravitationsfeld

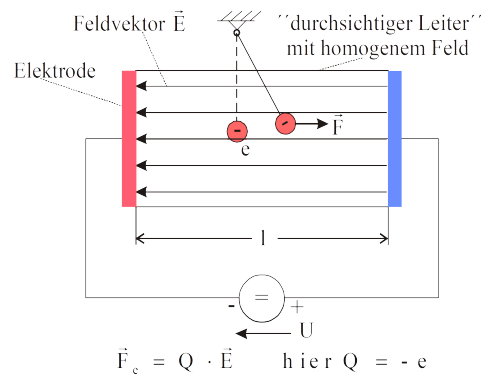


feldbestimmende physikalische Größen

Erdbeschleunigung

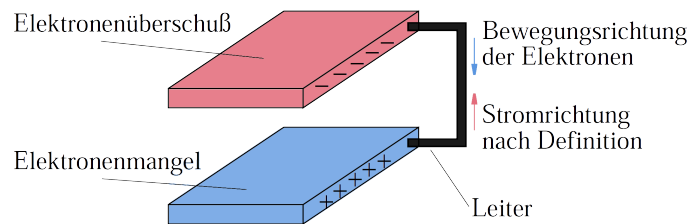
$$|\vec{g}| = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Elektrisches Feld



Elektrische Feldstärke

$$|\vec{E}| = \frac{U}{l} \quad \text{z.B.} \quad \frac{100 \text{ V}}{1 \text{ m}} = 100 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Beispiel 2:**2.2 Elektrischer Strom**

Man kann den Ladungsträger-Ausgleichsvorgang als Funktion der Zeit beobachten.

- Kupferdraht, Silberdraht usw. schneller Ausgleich
- Holzstab, Faden usw. langsamer Ausgleich

d.h. transportierte Ladungsmenge pro Zeit ist unterschiedlich.

Man definiert: Die elektrische Stromstärke I ist die pro Zeiteinheit dt durch einen gegebenen (beliebigen) Querschnitt A hindurchfließende Ladungsmenge dQ (mit $Q = N \cdot e$)

Für zeitlich veränderliche Ströme gilt:

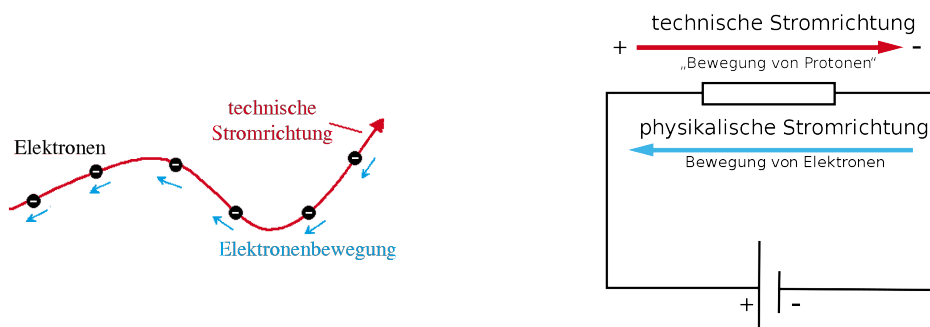
Definition der Stromstärke

$$I = \frac{\text{verschobene Ladung}}{\text{Zeit}} = \frac{dQ}{dt} \quad (2.1)$$

Die Einheit der Stromstärke heißt Ampere (Basiseinheit) $[I] = \text{A} = \text{Ampere}$

Merke:

- Die technische Stromrichtung von plus nach minus.
- Die physikalische Stromrichtung von minus nach plus.

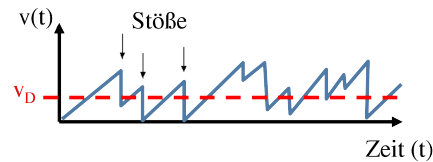


Als man den Strom entdeckte, legte man fest, dass der Strom vom Pluspol zum Minuspol fließen würde. Als man dann jedoch Einblicke in die Atomphysik bekam, merkte man, dass dies falsch war.

Man hat die ursprüngliche Bezeichnung der Stromrichtung aber trotzdem beibehalten.

Driftgeschwindigkeit:

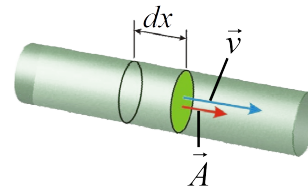
- Ladungsträger führen in elektrisch leitenden Stoffen unregelmäßige Bewegungen aus. Stöße der Elektronen mit Gitteratomen bremsen diese.



- Überlagert sich eine Bewegung in eine bestimmte Richtung ($\vec{E}$ -Feld, Coulombkraft), so wird dies als elektrischer Strom I bezeichnet: $\Rightarrow$ Ausbildung einer konstanten Driftgeschwindigkeit $v_D \Rightarrow$ konstanter Strom.
- Das Fließen ist nur in einem geschlossenen Kreislauf möglich.
- Der im Stromkreis fließende (zeitlich konstante Strom) wird Gleichstrom genannt.
- Hierfür ist eine treibende Kraft, eine Spannungsquelle notwendig.

Beispiel:

Mit welcher mittleren Geschwindigkeit v_D (Drift- oder auch Strömungsgeschwindigkeit genannt) bewegen sich die Elektronen, falls ein Strom $I = 1 \text{ A}$ durch einen Leiter aus Kupfer mit einem Querschnitt von 1 mm^2 fließt?



Einführung der Elektronendichte $n_e \rightarrow$ Anzahl freier Elektronen pro Volumeneinheit

Für Kupfer gilt: $n \approx 8 \cdot 10^{19} \frac{1}{\text{mm}^3} = 8 \cdot 10^{22} \frac{1}{\text{cm}^3}$

Dann gilt:

Ladung Q durch Fläche A in der Zeit Δt : $Q = e \cdot n_e \cdot dx \cdot A = e \cdot n_e \cdot v_D \Delta t \cdot A$

$$v_D = \frac{Q}{e \cdot n_e \Delta t \cdot A} = \frac{I \cdot \Delta t}{e \cdot n_e \cdot \Delta t \cdot A} = \frac{I}{e \cdot n_e \cdot A}$$

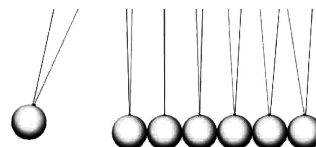
$$= \frac{1 \text{ A}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 8 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} \cdot 1 \text{ mm}^2} = \frac{1 \frac{\text{C}}{\text{s}} \cdot 1000 \text{ mm}^3}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 8 \cdot 10^{22} \cdot 1 \text{ mm}^2}$$

$$\approx 0.08 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \approx 0.3 \frac{\text{m}}{\text{h}}$$

Weinbergschnecke: maximal 4 $\frac{\text{m}}{\text{h}}$

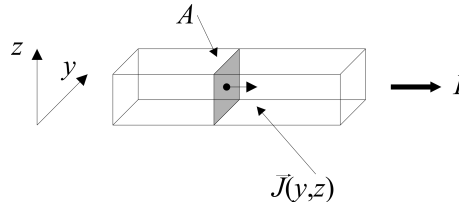
**Allerdings:**

Ein Stromimpuls in der Leitung bewegt sich fast mit Lichtgeschwindigkeit c_0 .



2.3 Elektrische Stromdichte

Verteilt sich der elektrische Strom I gleichmäßig auf den zur Verfügung stehenden Leitungsquerschnitt A , so kann der Strom I über die Stromdichte J definiert werden:



Definition Stromstärke über die Stromdichte

$$I = J \cdot A \quad (2.2)$$

Damit lässt sich die Stromdichte schreiben als:

Definition der Stromdichte

$$J = \frac{I}{A} \quad (2.3)$$

Die Einheit der Stromdichte ist $[J] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

In der Praxis wird oft die Einheit verwendet $[J] = \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$

Beispiel 1:

Die Stromdichte J beträgt bei einem Strom der Stromstärke I von 1 A innerhalb eines Leiters mit der Querschnittsfläche A von 10 mm^2 :

$$J = \frac{I}{A} = \frac{1 \text{ A}}{10 \text{ mm}^2} = 0.1 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

Ein technisch wichtiger Stromleiter ist Kupfer. Die Stromdichte wird im allgemeinen auf $6 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$ ausgelegt, damit unter Dauerlast keine unzulässige Erhitzung vorkommt.

Aufgrund der mit dem Stromfluss verbundenen Wärmeerzeugung und dem somit steigenden Widerstand, ist die maximale Stromdichte begrenzt, kurzzeitig kann sie jedoch beliebig hoch werden.

In Schmelzsicherungen wird die Erhitzung genutzt, um den Strom zu unterbrechen. Nach VDE 0100 beträgt der maximale Strom von Leitern 13 A bei einer Querschnittsfläche von 0.75 mm^2 , 16 A bei 1.0 mm^2 sowie 27 A bei 2.5 mm^2 .

Beispiel 2:

Auch bei Brennstoffzellen spielt die Stromdichte eine entscheidende Rolle. In einer Brennstoffzelle wird in einer Flächenreaktion chemische Energie elektrochemisch in elektrische Energie (elektrischen Strom I) und Wärme umgewandelt.

Um die Leistung von Brennstoffzellen mit unterschiedlicher aktiver Fläche besser miteinander vergleichen zu können, wird der von der Zelle produzierte elektrische Strom durch die aktive Fläche geteilt.

$$\text{Das Ergebnis ist die Stromdichte: } J = \frac{I}{A} = \frac{100 \text{ A}}{200 \text{ cm}^2} = 0.5 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}.$$

2.4 Elektrische Spannung

Zum Fließen des Stromes ist eine elektrische Spannungsquelle erforderlich.

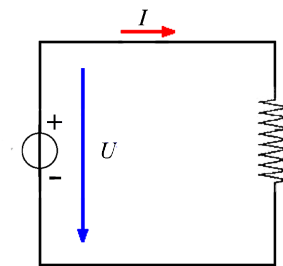
Sie wirkt als Kraft auf die Ladungsträger und bringt die Elektronen zum Fließen.

Erzeugung:

- Elektrochemische Spannungsquelle: z.B. Batterie, Akkumulator
- Elektromechanische Spannungsquelle: z.B. Gleichspannungsgenerator
- Photoelektrische Spannungsquelle: z.B. Solarzelle

Die Definition der Spannung wird über die Arbeit W in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ die an einer Ladung Q verrichtet wird geführt:

- Leitung mit Spannungsquelle verbunden
- Ein Strom I fließt
- Energieaufwand und Erwärmung des Leiters
- Spannungsquelle gibt Energie ab



Die entstehende Wärmeenergie W ist proportional zur Ladung Q :

$$W = U \cdot Q \quad (2.4)$$

und U wird als elektrische Spannung bezeichnet:

Definition der Spannung

$$U = \frac{W}{Q} \quad (2.5)$$

Die Einheit der Spannung ist $[U] = \frac{\text{Nm}}{\text{As}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{As}^3}$

und damit die Einheit für die elektrische Spannung $U : [U] = \text{V}$.

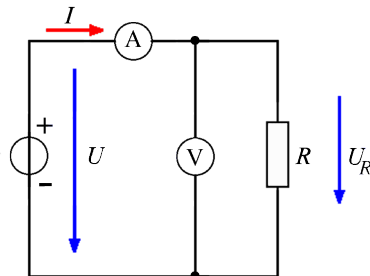
Wichtig:

- Richtungspfeil U : vom Pluspol (+) zum Minuspol (-)
 Richtungspfeil I : vom Pluspol (+) zum Minuspol (-)

2.5 Das ohmsche Gesetz

Strom und Spannung sind voneinander abhängig.

Das mit R gekennzeichnete Schaltzeichen stellt einen elektrischen Widerstand dar.



Messaufbau:

Voltmeter (V), zur Messung von U

Amperemeter (A), zur Messung von I

⇒ Bei Veränderung von U erkennt man: $U \sim I$

Die Proportionalität wird ausgedrückt durch das

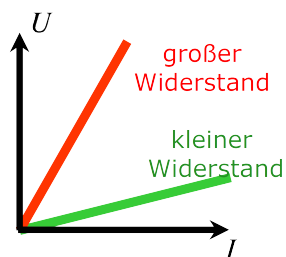
Ohmsche Gesetz

$$U = I \cdot R \quad (2.6)$$

Die Einheit des Widerstandes ist: $[R] = \frac{V}{A}$.

Man verwendet die Bezeichnung Ohm (Einheitenzeichen Ω): $\Omega = 1 \frac{V}{A}$

Da R unabhängig von der Größe des Stromes I ist, spricht man von einem linearen Stromkreis.



Georg Simon Ohm
(1789-1854)

Der Kehrwert des elektrischen Widerstandes wird als elektrischer Leitwert bezeichnet:

$$G = \frac{1}{R} \quad (2.7)$$

Mit der Einheit Siemens (Einheitenzeichen S): $1 \text{ S} = \frac{1}{\Omega} = 1 \frac{A}{V}$

2.6 Spezifischer Widerstand und Leitfähigkeit

Der spezifische Widerstand eines Leiters lässt sich messtechnisch nach dem Ohmschen Gesetz $R = U/I$ ermitteln.

Es ergibt sich:

- R ist proportional zur Leiterlänge l
- und umgekehrt proportional zum Leiterquerschnitt A : $R \sim \frac{l}{A}$

Elektrischer Widerstand

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (2.8)$$

Die Proportionalitätskonstante ρ wird als spezifischer Widerstand bezeichnet.

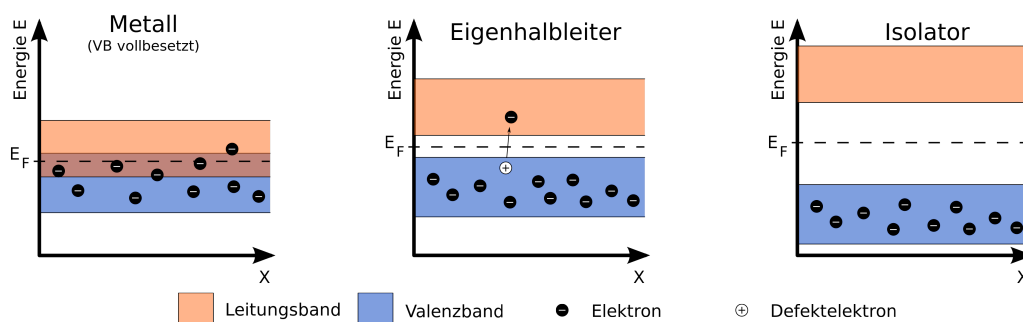
Er beinhaltet die Eigenschaften des Leiterwerkstoffes und stellt eine Materialkonstante dar.

Die Einheit ergibt sich aus Gleichung (2.8): $[\rho] = \frac{\Omega \text{m}^2}{\text{m}} = \Omega \text{m}$

Der spezifische Widerstand verschiedener Materialien überdeckt sehr weite Bereiche:

Material	ρ [Ωm]	
Eisen	$9.81 \cdot 10^{-8}$	Leiter: Widerstand steigt mit Temperatur
Kupfer	$1.68 \cdot 10^{-8}$	
Platin	$1.05 \cdot 10^{-7}$	
Germanium	0.5	Halbleiter: Widerstand sinkt mit Temperatur
Silizium	$2 \cdot 10^3$	
dest. Wasser	$2.3 \cdot 10^5$	Isolatoren: indifferent
Glas	$10^{13} - 10^{14}$	
Papier	$10^{15} - 10^{16}$	
Porzellan	$10^{10} - 10^{16}$	
Teflon	$1 \cdot 10^{17}$	
Bernstein	$> 10^{17}$	

Ursache für die unterschiedlichen Leitungseigenschaften sind die Zustände in den Energiebändern der Atome:



Das Bändermodell oder Energiebändermodell ist ein quantenmechanisches Modell zur Beschreibung von elektronischen **Energiezuständen** in einem idealen Einkristall. Um vom Valenzband ins Leitungsband zu springen, muss ein Elektron die Energie E_F überwinden.

Durch Zufuhr von ausreichend viel Energie, also bei (sehr) hohen Temperaturen oder durch Anlegen einer genügend hohen Spannung, kann jeder Isolator zum Leiter werden (wobei dieser dann allerdings zerstört wird).

Der Kehrwert des spezifischen Widerstandes wird als Leitfähigkeit σ bezeichnet (Elektrochemie: κ , oder auch γ).

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (2.9)$$

Die Einheit ist: $[\sigma] = \frac{1}{\Omega \text{m}} = \frac{\text{S}}{\text{m}}$

Oder mit Gleichung (2.8):

Elektrischer Widerstand

$$R = \frac{l}{\sigma A} \quad (2.10)$$

Beispiel: Reale Widerstände

	Draht	Kohleschicht	Metallschicht	Edelmetall-schicht	Metall-glasur
Werkstoffe	Cr-Ni, Cu-Ni, Cu-Mn	C	Cr-Ni, SnO ₂	Au-Pt	Cermet
Wertebereich	0,1Ω bis 300 kΩ	1 Ω bis 22 MΩ	1Ω bis 22 MΩ	0,1Ω	1 Ω bis 50 GΩ
Toleranz	± (0,01% bis 10 %)	± 5 %	± (0,1 % bis 2 %)	± (0,1 % bis 2 %)	± (0,1 % bis 5 %)
Temperaturkoeffizient α_{20} [10 ⁻⁵ K ⁻¹]	± (1 bis 200)	- (200 bis 1200)	+ (0 bis 60)	+ (200 bis 350)	± (25 bis 200)
Zulässige Temperatur [°C]	- 55 °C bis + 450 °C	- 55 °C bis + 175 °C	- 65 °C bis + 175 °C	- 65 °C bis + 175 °C	- 65 °C bis + 155 °C
Maximale Belastbarkeit P ₂₀	0,25 W bis 100 W	0,25 W bis 1 W	0,25 W bis 2 W	0,7 W bis 6 W	0,12 W bis 0,25 W
Stabilität ($\vartheta = 70^\circ\text{C}$; 100.000 f)	± (0,1 % bis 5 %)	± (1 % bis 10 %)	± (0,1 % bis 1 %)	± (0,1 % bis 5 %)	± 2 %
Normen	DIN 44185 DIN 44196 DIN 44197	DIN 44051 bis 44053 DIN 44055	DIN 44061 DIN 44063 DIN 45921		DIN 41428 DIN 44064
Bemerkungen	Niedrige Widerstände, hohe Leistung	Universalwiderstand, preiswert	Häufigster Typ, preiswert	Niedrige Widerstände, sehr feuchtebeständig	Vielseitiges SMD-Bauelement
Anwendungsbereich	Nachr., Meß-, Starkstromtechnik, Regelwiderstände	Unterhaltungselektronik	Unterhaltungs-, Industrieelektronik, Datenverarbeitung, Raumfahrt	Temperaturkompensation, Sicherheitswiderstände	Dickschichttechnik
Beispiel					

2.7 Temperaturabhängigkeit

Durch Anlegen einer Spannung an einen metallischen Leiter setzt ein elektrischer Stromfluß ein:

- keine konstante Geschwindigkeit der Elektronen
- diese werden beschleunigt und stoßen mit Atomen zusammen
- Abbremsung führt auf mittlere Strömungsgeschwindigkeit

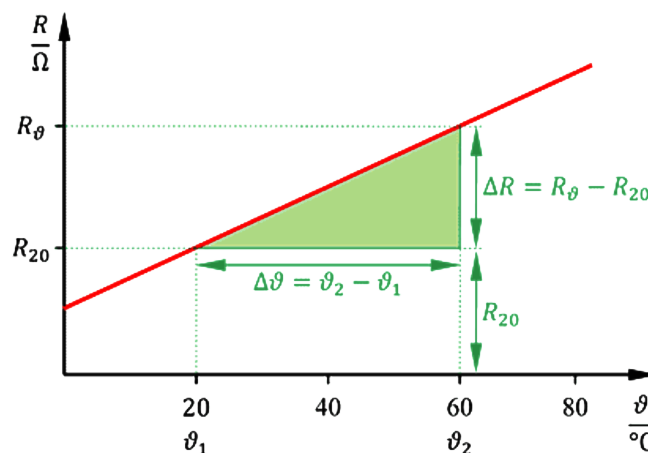
Atome / Moleküle führen Schwingbewegungen aus:

- Intensität nimmt mit Temperatur zu
- Fließen des Stromes wird erschwert; die statistische Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes nimmt zu.

Vor allem für metallische Werkstoffe gilt:

Der elektrische Widerstand nimmt mit der Temperatur zu

In gewissen Bereichen ($\Delta T < 100^\circ\text{C}$), kann man die Erhöhung des Widerstandes bei Metallen als linear ansehen.



Es gilt daher:

$$R_\vartheta = R_{20} + \Delta R$$

$$\Delta R = R_{20} \cdot \alpha \cdot \Delta \vartheta$$

$$R_\vartheta = R_{20} + R_{20} \cdot \alpha \cdot \Delta \vartheta$$

Temperaturabhängiger Widerstand

$$R_\vartheta = R_{20}(1 + \alpha \cdot \Delta \vartheta) \quad (2.11)$$

α wird als Temperaturkoeffizient bezeichnet und gilt meist bei $20^\circ\text{C} \rightarrow \alpha_{20}$

Die Einheit ist: $[\alpha] = \frac{1}{\text{K}}$.

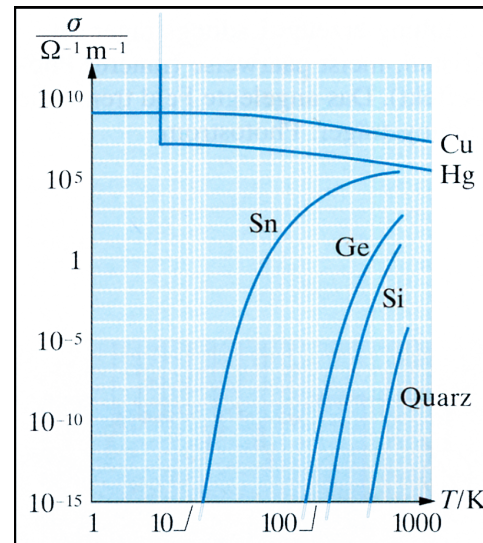
Beispiele:**Leitfähigkeit σ_T :**

Bei manchen Stoffen, vor allem bei Halbleitern, erhöht sich der Leitwert mit steigender Temperatur.

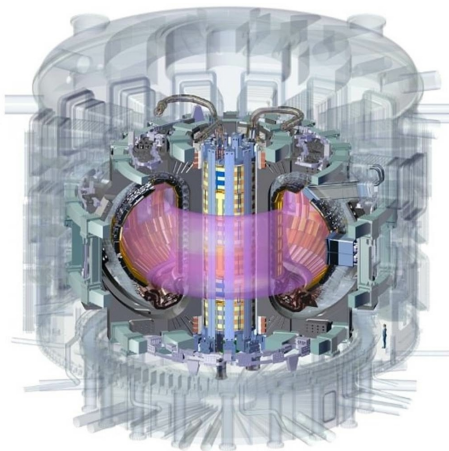
Hier steigt dann die **Beweglichkeit** der freien Elektronen und Löcher.

Supraleitung:

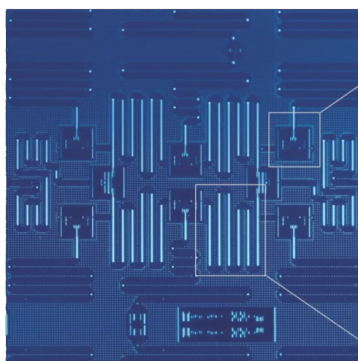
Bei manchen Werkstoffen sinkt der Widerstand in der Nähe des absoluten Nullpunktes sprunghaft auf extrem kleine Werte ab. Eigenschwingungen der Gitteratome werden 'eingefroren' → Weg zwischen zwei Kollisionen (freie Weglänge λ) wird sehr groß.

**Anwendungen für Supraleitung:**

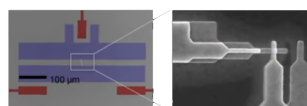
- **Kernfusion (Erzeugung hoher Magnetfelder):**



- **Quantencomputing (Erzeugung von Qubits):**



Qubit → behaves like an artificial atom!



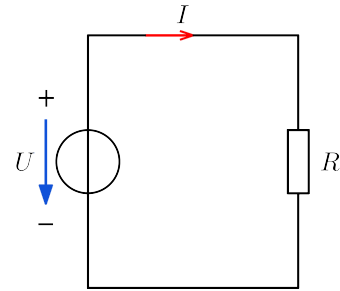
Superconducting Josephson Junction
0.015 Kelvin – colder than space!

Microwave resonator – address and couple the qubits

2.8 Arbeit und Leistung bei Gleichstrom

Einem Widerstand R der an einer Spannung U liegt, wird nach Gleichung (2.4) die Energie oder Arbeit $W = U \cdot Q$ zugeführt.

Mit der Stromstärke I und der Zeitdauer t des Stromflusses ergibt sich:



Elektrische Arbeit/Energie

$$W = U \cdot I \cdot t \quad (2.12)$$

Die Einheit der **elektrischen Arbeit/Energie** ist:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ VAs} = 1 \text{ Ws} = 1 \text{ Nm} = \frac{1 \text{ kgm}^2}{\text{s}^2}$$

Ein Stromkreis ermöglicht die Übertragung von Energie. Sie wird in einem Widerstand R in **Wärmeenergie** umgewandelt.

Die pro Zeiteinheit übertragene Energie wird als **Leistung** P bezeichnet.

Es gilt: $P = \frac{W}{t}$ und mit Gleichung 2.13:

Elektrische Leistung

$$P = U \cdot I \quad (2.13)$$

Die Einheit der Leistung mit der Bezeichnung Watt ist $[P] = \text{VA} = \text{W}$

$$\text{Es gilt: } 1 \text{ W} = 1 \text{ VA} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^3}$$

Fließt in einem Widerstand bei einer anliegenden Spannung von einem Volt ein Strom von einem Ampere, so wird dem Widerstand eine Leistung von einem Watt zugeführt.

Mit dem ohmschen Gesetz ($I = \frac{U}{R}$, $U = R \cdot I$) ergibt sich für die Leistung auch:

Elektrische Leistung

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R \quad (2.14)$$

2.9 Wirkungsgrad η (eta)

Bei der Energieumwandlung ist der Wirkungsgrad von Bedeutung.

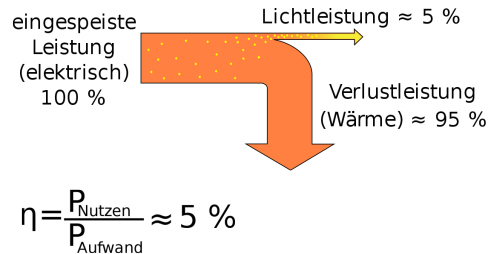
Der Wirkungsgrad ist das Verhältnis der bei der Energieumwandlung abgegebenen (Nutzenergie) zu der zugeführten Energie/Leistung.



Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \quad (2.15)$$

Beispiel: Glühlampe



Vergleich LED:

Vorschaltgerät (90%)

LED (35%)

Optik (95%)

Rechnung: $0.9 \cdot 0.35 \cdot 0.95 = 0.3$

$\Rightarrow \eta = 30\%$

Praxis: η zwischen 10% und 40%

Betriebskosten-Vergleich:

			
Rechenbeispiel	Glühlampe 60 W	Energiesparlampe 11 W	LED-Lampe 3,5 W
Anschaffungspreis	1,00 €	5,00 €	3,40 €
Lebensdauer in Stunden	1.000	10.000	15.000
Stromkosten für 1.000 Stunden	15,60 €	2,90 €	0,95 €
Gesamtkosten für 10.000 Stunden	157,00 €	34,00 €	12,90 €
Wirkungsgrad	5 %	40 %	30 %

KAPITEL 3

Gleichstromschaltungen

Schaltungen, die durch Gleichspannungs- oder Gleichstromquellen versorgt werden nennt man Gleichstromschaltungen bzw. Gleichstromkreise.

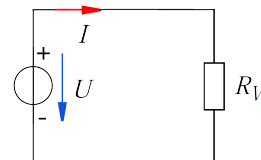
Berechnete Größen: Spannungen, Ströme, Leistungen, Widerstände

3.1 Bezugssinn und Pfeilsysteme

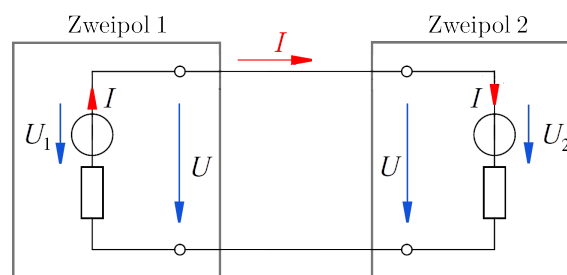
In elektrischen Schaltungen werden Spannungs- und Stromrichtungen durch Pfeile gekennzeichnet.

Spannungspfeil: von (+) nach (-)

Strompfeil: Richtung vom (+) des Erzeugers weg



Mehrere Quellen:



Der Strom ist jetzt abhängig vom Betrag der Spannung U_1 und U_2 .

Die Stromrichtung kann **willkürlich** vorgegeben werden

→ Bezeichnung: Bezugssinn (Zählpfeilrichtung (ZPR))

Bei Übereinstimmung von Bezugssinn und Richtungssinn:

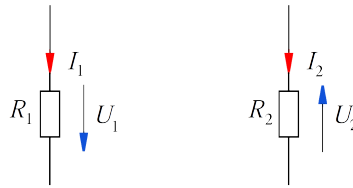
I hat positiven Wert, andernfalls ist I negativ.

I ist positiv → Leistung $P = UI > 0$: Zweipol 1 gibt Leistung ab.

I ist negativ Wert → Leistung $P = UI < 0$: Zweipol 1 nimmt Leistung auf.

Man nennt diese Zuordnungsvereinbarung auch Verbraucher-Pfeilsystem.

Grundsätzlich können Bezugspfeile für U und I in einer Schaltung frei gewählt werden.



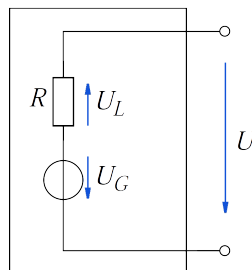
Nach dem ohmschen Gesetz gilt: $U_1 = I_1 \cdot R_1$ $U_2 = -I_2 \cdot R_2$

3.2 Zweipole

Alle im Beispiel gezeigten Elemente des Stromkreises (Spannungsquelle, Widerstände) haben zwei Anschlüsse und werden deshalb als Zweipole bezeichnet. Bei einem Zweipol interessiert man sich

- nicht für Schaltungsdetails im Inneren, sondern
- nur für die Strom-Spannungscharakteristik

$I = f(U)$, die man von außen bestimmen kann.



Definition: Zweipole heißen linear, wenn die Beziehung $I = f(U)$ (Strom-Spannungs-Charakteristik) linear ist.

Man unterscheidet noch einmal:

Passive lineare Zweipole:

d.h. es ist keine Strom- oder Spannungsquelle im Zweipol enthalten (passiv) und das System ist linear.

Beispiel: Ohm'sche Widerstände und beliebige Kombinationen daraus.

Aktive lineare Zweipole:

d.h. der Zweipol kann elektrische Energie abgeben (aktiv) und ist linear.

Beispiel: Realer Generator

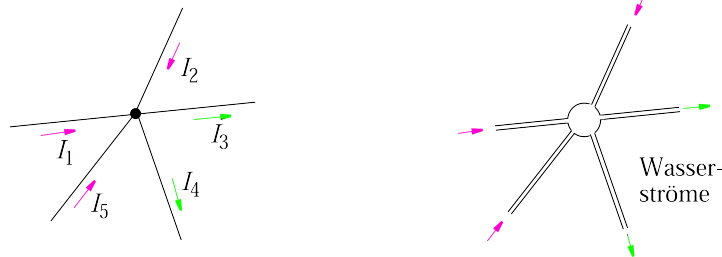
bei dem die Klemmenspannung vom Strom I abhängt. Man kann einen realen Generator durch ein Ersatzschaltbild aus einem idealen Generator und einem Widerstand darstellen. Eine solche Spannungsquelle zeigt von außen die gleiche Strom-Spannungscharakteristik, ersetzt also die reale Spannungsquelle für unsere Betrachtungen und heißt deshalb Ersatzspannungsquelle. Es gilt: $U = U_G - U_R$, d.h. die Ersatzspannungsquelle ist ein linearer, aktiver Zweipol.

3.3 Die Kirchhoffschen Gesetze

Für die Berechnung von Strömen und Spannungen sind die zwei Kirchhoffschen Gesetze von Bedeutung.

3.3.1 Das 1. Kirchhoffsche Gesetz: Knotenregel

Bezieht sich auf die Verzweigungspunkte oder Knoten innerhalb der Schaltkreise.



- In Knoten kann keine elektrische Ladung gespeichert werden.
- Die Summe aller auf einen Knoten zufließenden Ströme = Summe aller vom Knoten wegfließenden Ströme.

Vereinbarung:

Der Strom I_i im Zweig i zählt **positiv**, wenn die technische Stromrichtung zum Knoten hin zeigt. Dies ist der Fall bei ZPR zum Knoten und positivem Vorzeichen, oder bei ZPR weg vom Knoten und negativem Vorzeichen

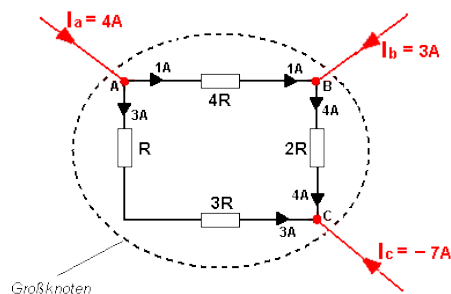
Der Strom I_i im Zweig i , zählt **negativ**, wenn die technische Stromrichtung vom Knoten weg zeigt. Dies ist der Fall bei ZPR zum Knoten und negativem Vorzeichen, oder bei ZPR weg vom Knoten und positivem Vorzeichen.

Mit dieser Vereinbarung gilt:

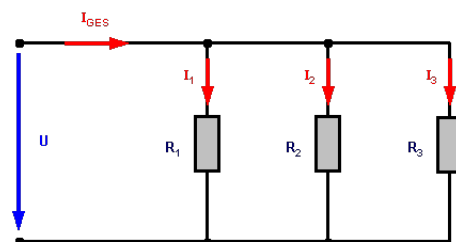
Kirchhoffsche Knotenregel

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (3.1)$$

Beispiele:



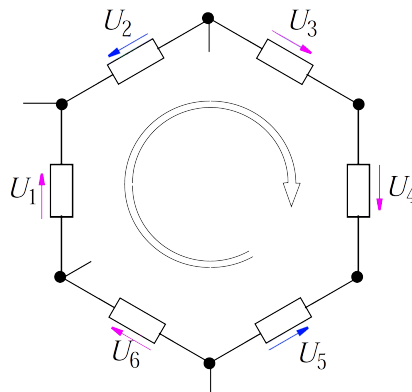
$$I_a + I_b + I_c = 0$$



$$I_{ges} = I_1 + I_2 + I_3$$

3.3.2 Das 2. Kirchhoffsche Gesetz: Maschenregel

Die Kirchhoffsche Maschenregel gilt nicht nur für geschlossene Umläufe in Maschen eines Netzwerks, sondern für jeden geschlossenen Umlauf.



Vereinbarung:

Eine Spannung zählt positiv, wenn sie positives Vorzeichen hat und die ZPR mit der Umlaufrichtung übereinstimmt, oder wenn sie negatives Vorzeichen hat und die ZPR der Umlaufrichtung entgegengesetzt ist.

Eine Spannung zählt negativ, wenn sie negatives Vorzeichen hat und die ZPR mit der Umlaufrichtung übereinstimmt, oder wenn sie positives Vorzeichen hat und die ZPR der Umlaufrichtung entgegengesetzt ist.

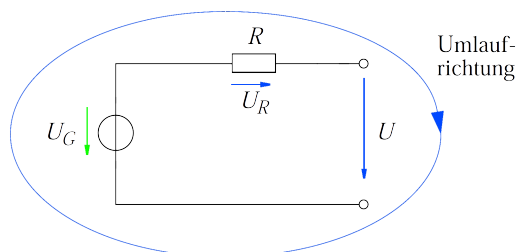
Mit dieser Vereinbarung gilt:

Kirchhoffsche Maschenregel

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0 \quad (3.2)$$

Die Kirchhoffsche Maschenregel gilt nicht nur für geschlossene Umläufe in Maschen *eines* Netzwerks, sondern für *jeden* geschlossenen Umlauf.

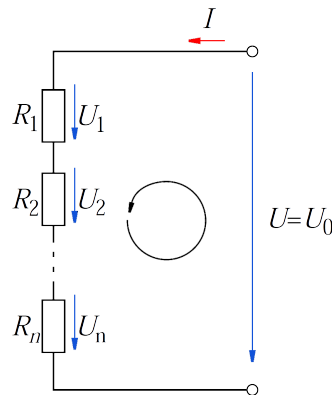
Beispiel:



$$\sum_{i=1}^n U_i = (-U_G + U_R + U) = 0 \quad \text{oder} \quad U = U_G - U_R$$

3.4 Serien- und Parallelschaltung von Widerständen

3.4.1 Serienschaltung



Maschenregel:

$$\sum_{i=0}^n U_i = -U_0 + \sum_{i=1}^n U_i = 0 \quad \text{oder} \quad U_0 = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n I_i \cdot R_i$$

Knotenregel:

Alle Ströme $I_i = I$ sind gleich, weil im einfachen Stromkreis zu jedem Knoten nur zwei Zweige führen, deren Ströme in Summe gleich Null sind. Damit gilt:

$$U_0 = \sum_{i=1}^n I_i \cdot R_i = \sum_{i=1}^n I \cdot R_i = I \cdot \sum_{i=1}^n R_i$$

Bezeichnet man

$R = \sum_{i=1}^n R_i$ als Gesamtwiderstand der Reihenschaltung und $U = U_0$ als die Gesamtspannung,

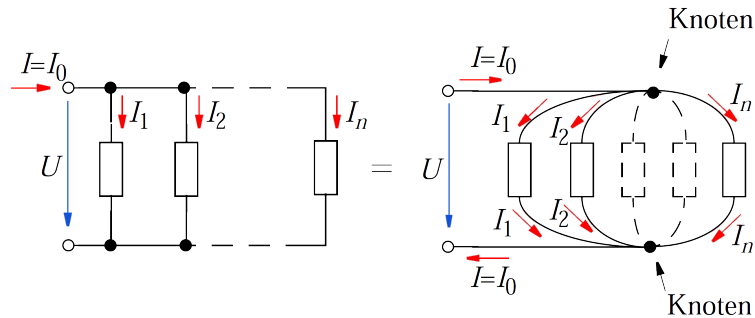
so gilt

$$U = I \cdot R$$

Also: Bei einer Reihenschaltung addieren sich die Teilwiderstände R_i zu einem Gesamtwiderstand R .

$$R_{ges} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

3.4.2 Parallelschaltung



Knotenregel:

$$\sum_{i=0}^n I_i = -I_0 + \sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad \text{oder} \quad I_0 = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n U_i \cdot G_i$$

Maschenregel:

Alle Spannungen $U_i = U$ sind gleich, weil beliebige Paare von Widerständen Maschen mit zwei Zweigen bilden, deren Spannungen in Summe Null sind. Somit gilt:

$$I_0 = \sum_{i=1}^n U_i \cdot G_i = \sum_{i=1}^n U \cdot G_i = U \cdot \sum_{i=1}^n G_i$$

Bezeichnet man

$G = \sum_{i=1}^n G_i$ als Gesamtleitwert der Parallelschaltung und $I = I_0$ als den Gesamtstrom,

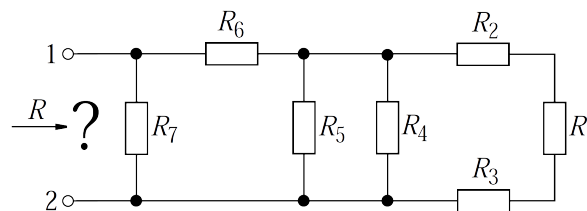
so gilt

$$I = G \cdot U$$

Also: Bei einer Parallelschaltung addieren sich die Leitwerte G_i bzw. die Kehrwerte $1/R_i$ der Widerstände zum Leitwert G bzw. Kehrwert $1/R$ des Gesamtwiderstandes.

$$G_{ges} = G_1 + G_2 + \dots + G_n \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Beispiel Widerstandsnetze:



Der Gesamtwiderstand R zwischen den Klemmen 1 und 2 kann bereits mit den bekannten Regeln für Reihen- und Parallelschaltung schrittweise berechnet werden:

Schritte:

$$R_{123} = R_1 + R_2 + R_3 \quad (\text{Reihenschaltung})$$

$$\frac{1}{R_{12345}} = \frac{1}{R_{123}} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \quad (\text{Parallelschaltung})$$

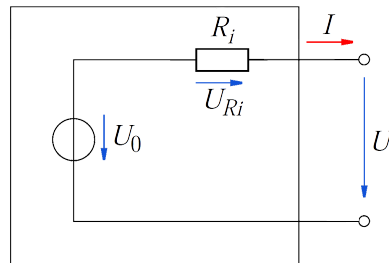
$$R_{123456} = R_{12345} + R_6 \quad (\text{Reihenschaltung})$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{123456}} + \frac{1}{R_7} \quad (\text{Parallelschaltung})$$

3.5 Ersatzquellen

3.5.1 Ersatzspannungsquelle

Ersatzschaltbild des linearen aktiven Zweipols



Das Klemmenverhalten $U = U_0 - R_i \cdot I$ (Strom-Spannungs-Charakteristik) einer *realen* Spannungsquelle wird durch obige Ersatzspannungsquelle richtig beschrieben.

Man nennt

- U : Klemmenspannung
- I : Klemmenstrom
- U_0 : Quellenspannung und
- R_i : Innenwiderstand

Betrachtet man die Ersatzspannungsquelle als Zweipol, so sind U_0 und R_i von außen nicht zugänglich und müssen durch Messung von U und I bestimmt werden.

Die lineare Strom-Spannungs-Kennlinie kann durch zwei beliebige Messwertpaare (U, I) festgelegt werden, besonders vorteilhaft sind jedoch Messungen bei Leerlauf und Kurzschluss.

Leerlauf: Betriebszustand, in dem kein Strom fließt ($I = 0$).

U_L : Leerlaufspannung = Klemmenspannung U bei $I = 0$.

Mit $I = 0$ wird der Spannungsabfall am Innenwiderstand R_i zu Null und die Quellenspannung wird als Klemmenspannung messbar:

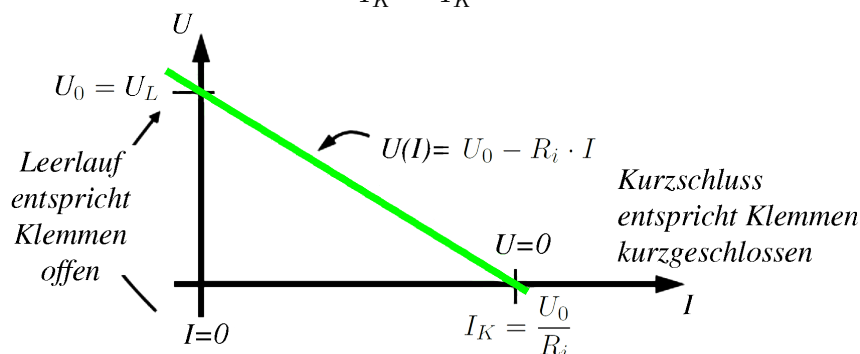
$$U_0 = U_L = U(I = 0)$$

Kurzschluss: Betriebszustand, in dem beide Klemmen auf gleichem Potential liegen ($U = 0$).

I_K : Kurzschlussstrom = Strom I bei Klemmenspannung $U = 0$.

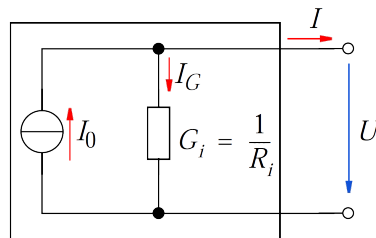
Mit $U = 0$ liegt die gesamte Quellenspannung am Innenwiderstand und dieser wird als Quotient aus Quellenspannung und Kurzschlussstrom messbar:

$$I_K = \frac{U_0}{R_i} = I(U = 0) \text{ und damit } R_i = \frac{U_0}{I_K} = \frac{U_L}{I_K}$$



3.5.2 Ersatzstromquelle

Ersatzschaltbild des linearen aktiven Zweipols



Das Klemmenverhalten $I = I_0 - G_i \cdot U$ (Strom-Spannungs-Charakteristik) einer realen Stromquelle wird analog zur Ersatzspannungsquelle beschrieben.

Man nennt

- U : Klemmenspannung
- I : Klemmenstrom
- I_0 : Quellenstrom und
- G_i : Leitwert des Innenwiderstands

Kurzschluss: ($U = 0$).

I_K : Kurzschlussstrom = Strom I bei Klemmenspannung $U = 0$.

Mit $U = 0$ ist $I_G = G_i \cdot U$ und der gesamte Quellstrom fließt am Innenwiderstand vorbei, wird also als Kurzschlussstrom direkt messbar:

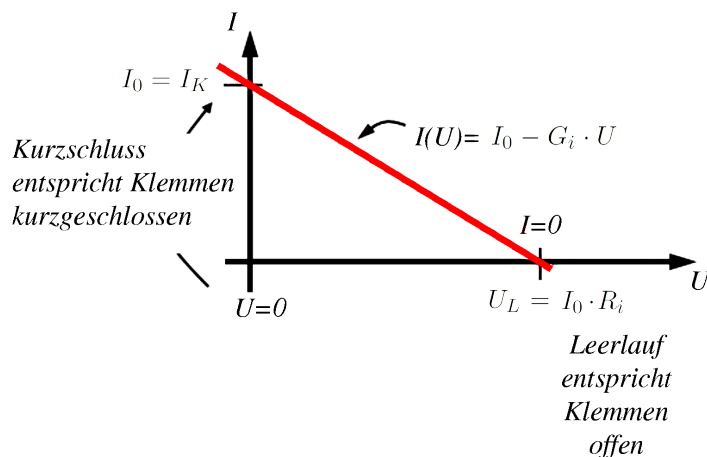
$$I_0 = I_K = I(U = 0)$$

Leerlauf: ($I = 0$).

U_L : Leerlaufspannung = Klemmenspannung U bei $I = 0$.

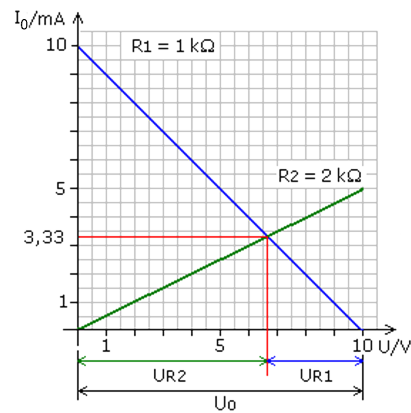
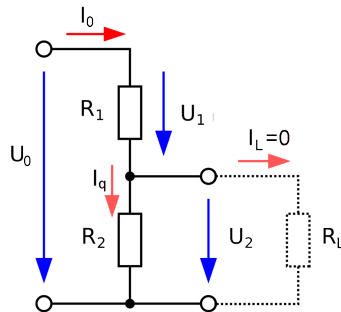
Mit $I = 0$ fließt der gesamte Quellstrom durch den Innenwiderstand R_i und dieser wird als Quotient aus Leerlaufspannung und Kurzschlussstrom von außen messbar:

$$R_i = \frac{U_L}{I_0} = \frac{U_L}{I_K}$$



3.5.3 Spannungsteiler

Zur Erzeugung einer Teilspannung U_2 aus der Quellspannung U_0 verwendet man die Spannungsteilerschaltung.



Spannungsteiler im Leerlauf:

Bei $I_L = 0$, näherungsweise bei $I_L \approx 0$ also bei $R_L \gg R_1, R_2$ (Leerlauf) gilt:

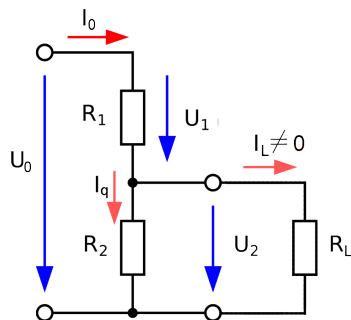
$U_0 = I_0 \cdot (R_1 + R_2)$ und damit ist $U_2 = I_0 \cdot R_2$, also

$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\text{Teilspannung}}{\text{Gesamtspannung}} = \frac{\text{Teilwiderstand}}{\text{Gesamtwiderstand}}$$

Belasteter Spannungsteiler:

Wird an den Ausgang des unbelasteten Spannungsteilers ein weiterer Widerstand R_L angeschlossen, so bildet er mit dem unteren Teilwiderstand R_2 eine Parallelschaltung. Am Verbindungspunkt, dem Schleiferabgriff, teilt sich der Strom auf und durch den Teilwiderstand R_2 fließt ein geringerer Strom als zuvor. Er wird oft als Querstrom I_q bezeichnet, da er parallel (quer) zur Belastung fließt.



$$U_0 = U_1 + U_2 \quad \text{und} \quad I_0 = I_q + I_L$$

$$R_{ers} = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}$$

$$U_1 = I_0 R_1 \quad \text{und} \quad U_2 = I_0 \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}$$

$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{R_{ers}}{R_1 + R_{ers}}$$

- Die Ausgangsspannung eines Spannungsteilers ist von der angeschlossenen Last abhängig.
- Mit zunehmender Belastung verringert sich bei gleichem Teilverhältnis die Ausgangsspannung.
- Je größer der Querstromfaktor $\frac{I_q}{I_L}$ ist, desto weniger macht sich die Lastabhängigkeit bemerkbar.
- Ein hoher Querstromfaktor setzt einen niederohmigen unbelasteten Spannungsteiler voraus.

3.6 Brückenschaltungen

Eine Brückenschaltung - auch H-Schaltung oder H-Brücke genannt - ist eine elektrische Schaltung, bei der in der Grundform vier Widerstände in Form des Großbuchstabens H zusammengeschaltet sind. Die Querverbindung U_{AB} heißt Brückenweig.

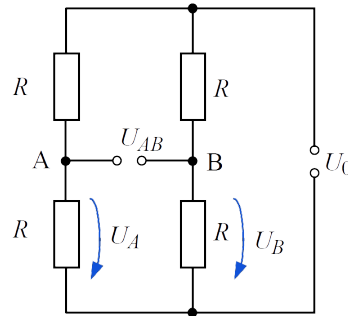


Bild 3.1: Brückenschaltung

Beispiel: Kraftmessung mit Dehnungsmessstreifen

Zur elektrischen Messung von Kräften gibt es mehrere Möglichkeiten, von denen zwei beschrieben werden sollen. Einerseits können Kräfte über die Verformung mechanisch bekannter Objekte gemessen werden, andererseits bietet sich die Ladungsverschiebung infolge der Kraftwirkung auf ein Piezokristall zur Bestimmung von Kräften mit elektrischen Messmethoden an.

Unter Dehnungen versteht man in der Messtechnik kleine Längenänderungen, die infolge von Erwärmung bzw. Krafteinwirkung an festen Körpern auftreten. Gelingt es die Temperatur des Körpers konstant zu halten, wird die Dehnung nur durch eine Kraftwirkung verursacht, auf die dann aus der ermittelten Dehnung geschlossen werden kann. Bei Verwendung elektrisch leitfähiger Körper, vorzugsweise aus Metall oder Halbleitermaterial bestehend, kann ein Sensor zur elektrischen Messung der Dehnung bzw. der sie verursachenden Kraft konstruiert werden.

Als Sensoren werden so genannte **Dehnungsmessstreifen, DMS**, verwendet. Diese bestehen aus einem Widerstandsmaterial (Halbleiter oder metallische Folie oder Draht, zumeist aus Konstantan oder einer Chrom-Nickel-Legierung), das auf einen Träger aufgebracht ist. Der DMS muss innig mit dem kraftbelasteten Körper verbunden werden, meist durch eine Verklebung mit Epoxidharz, so dass er jeder Längenänderung des Körpers auch erfährt.

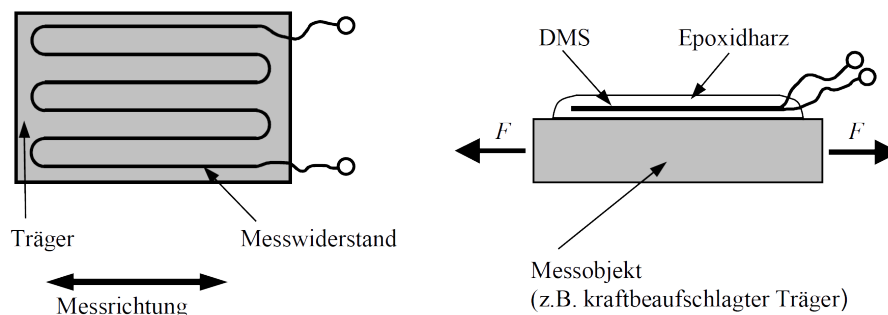


Bild 3.2: Dehnungsmessstreifen (DMS) und ein Anwendungsbeispiel

Der Zusammenhang zwischen Längenänderung und daraus resultierender Widerstandsänderung zeigt sich an einem metallischen Leiter in Drahtform wie folgt:

Für einen kreisförmigen Querschnitt des Drahtes bestimmt sich der Widerstand R in Abhängigkeit von Material und Geometrie des Drahtes zu:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \rho \cdot \frac{l \cdot 4}{\pi \cdot d^2} \quad (3.3)$$

mit:

ρ = spezifischer Widerstand des Drahtes,

l = Länge des Drahtes

A = Querschnittsfläche des Drahtes und

d = Durchmesser des Drahtes bei kreisförmigem Querschnitt

Die Widerstandsänderung ΔR infolge der Dehnung kann über das totale Differential abgeschätzt werden. Da nur kleine Änderungen vorliegen, ist der Übergang zu endlichen Differenzen zulässig (ohne Herleitung):

$$\Delta R = \frac{\delta R}{\delta \rho} \Delta \rho + \frac{\delta R}{\delta l} \Delta l + \frac{\delta R}{\delta d} \Delta d,$$

nach einigen Umstellungen und der Einführung des k -Faktors entsprechend den noch zu erläuternden Beschreibungen, kommt man zu der Gleichung für die relative Widerstandsänderung infolge Dehnung:

$$\frac{\Delta R}{R} = \varepsilon \cdot k, \quad (3.4)$$

als Produkt aus der relativen Längenänderung (Dehnung) $\varepsilon = \Delta l / l$ und dem k -Faktor, der letztlich die Empfindlichkeit des DMS charakterisiert.

<i>Kenngroße</i>	<i>Metall-DMS</i>	<i>Halbleiter-DMS</i>
Nennwiderstand R	120Ω...600Ω	120Ω...600Ω
k -Faktor	2	100...160
Arbeitsbereich der Dehnung ε	$< 10 \cdot 10^{-3}$ m/m	$< 1 \cdot 10^{-3}$ m/m
max. zulässige Dehnung ε_{max}	$< 50,0 \cdot 10^{-3}$ m/m	$< 5,0 \cdot 10^{-3}$ m/m
Temperaturkoeffizient	10^{-6} K^{-1}	$< 10^{-4} \text{ K}^{-1}$

Tabelle 3.1: Ausgewählte typische Parameter von DMS

Die relative Widerstandsänderung kann mittels Brückenschaltung oder Strom-, Spannungsmessung ausgewertet werden. Bei geeignetem Aufbau lässt sich insbesondere mit Brückenschaltungen eine weitgehend **temperaturkompensierte** Messschaltung aufbauen.

Da DMS rein ohmsche Widerstände realisieren, ist die Gleichstrombrücke hinreichend. In Verbindung mit höchsten Genauigkeitsforderungen kommen auch Trägerfrequenzmessgeräte zum Einsatz, deren Kern die Wechselstrommessbrücke ist. Folgende Brückenvarianten werden in Verbindung mit DMS benutzt:

DMS-Viertelbrücke:

Sie wird in Applikationen entsprechend folgender Abbildung angewendet. Es wird nur ein DMS zur Messwertgewinnung eingesetzt.

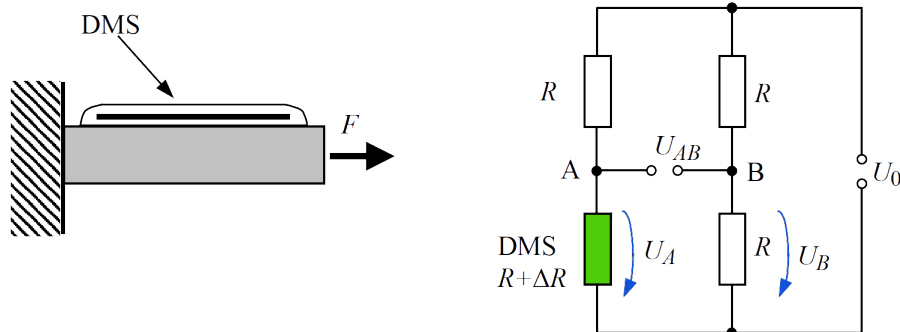


Bild 3.3: DMS-Viertelbrücke, Messaufbau und Messschaltung

Die sich ergebende Ausgangsspannung U_{AB} lässt sich als Funktion der zu messenden Dehnung ε ableiten. Die Ausgangsspannung entspricht der Spannungsdifferenz zwischen den Punkten A und B:

In der Praxis vorkommende Dehnungen können nur kleine Widerstandsänderungen hervorrufen, es gilt:

$R \gg \Delta R$ woraus folgt:

$$U_{AB} \approx \frac{U_0}{4} \cdot \frac{\Delta R}{R} = \frac{U_0}{4} \varepsilon \cdot k \quad (3.5)$$

Größtes messtechnisches Problem der Viertelbrücke ist das unmittelbare Eingehen temperaturabhängiger Widerstandsänderungen in das Messergebnis. Um speziell bei der Messung kleiner Dehnungen aussagekräftige Messwerte zu erzielen, ist unbedingt eine

Temperaturkompensation erforderlich. Bewährt haben sich Schaltungen mit so genannten passiven DMS.

Mit passiv bezeichnet man einen DMS, der möglichst gleichen Temperaturbedingungen wie der als Dehnungssensor fungierende DMS ausgesetzt ist, aber **keine** Dehnung erfährt. Somit ist seine Widerstandsänderung ΔR lediglich eine Funktion der Temperaturänderung ϑ .

Wird dieser passive DMS als zweiter veränderlicher Widerstand in die Viertelbrücke wie in folgender Abbildung gezeigten Weise eingebaut, kann der Potentialpunkt A durch eine Temperaturänderung nicht mehr verschoben werden. Der Temperatureinfluss auf die Ausgangsspannung wird vernachlässigbar.

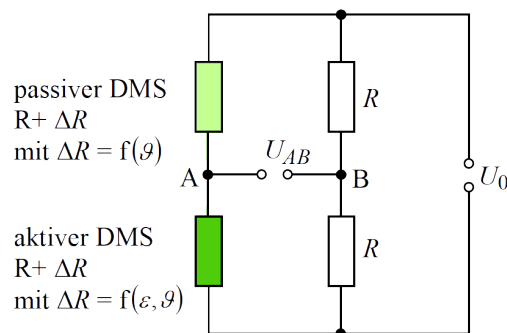


Bild 3.4: Viertelbrücke mit passivem DMS zur Temperaturkompensation

DMS-Halbbrücke:

Wenn es gelingt einen Messaufbau so zu konstruieren, dass zwei DMS betragsmäßig gleiche, vom Vorzeichen her aber entgegengesetzte Dehnungen erfahren, lässt sich das sogenannte **Differentialprinzip** auf die Messung mit DMS übertragen. Hier hat sich der Begriff der Halbbrücke eingebürgert. Die erforderlichen Bedingungen zum Aufbau findet man bei der Messung an Trägern, die auf Biegung beansprucht werden. Ist dieser Träger homogen und symmetrisch im Querschnitt, wird er bei der skizzierten Kraftwirkung auf der einen Seite eine Dehnung und auf der anderen Seite eine entsprechende Stauchung erfahren.

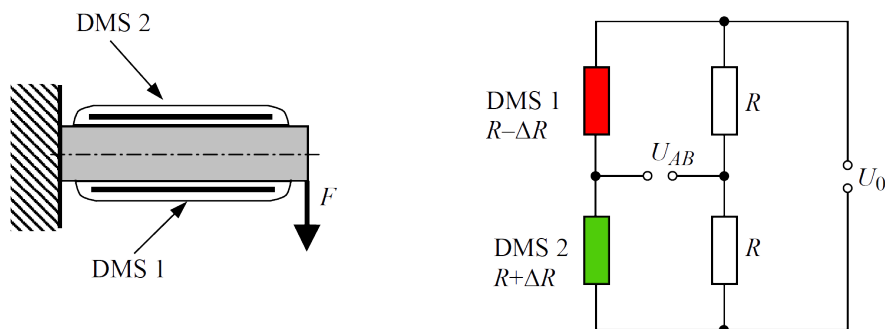


Bild 3.5: DMS-Halbbrücke, Messaufbau und Messschaltung

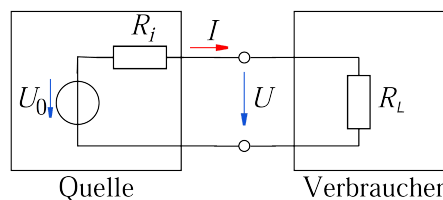
Die sich ergebende Ausgangsspannung U_{AB} für die Halbbrücke kann entsprechend der Vorgehensweise bei der Viertelbrücke bestimmt werden und ergibt sich zu:

$$U_{AB} = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{\Delta R}{R} = \frac{U_0}{2} \varepsilon \cdot k. \quad (3.6)$$

3.7 Energieumsetzung im Schaltkreis

Bei der Kombination eines aktiven Zweipols (Ersatzquelle) und eines passiven Zweipols (Verbraucher) wird am Verbraucher R und am Innenwiderstand R_i der Quelle Leistung verbraucht.

Die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit $\frac{dW}{dt}$ mit Leistung P ist $P = U \cdot I$.



Wann ist die Leistung P_L am Verbraucher, maximal?

Hinweis:

$$\begin{array}{llll} R_L = 0: & U = 0 & I = I_K & \text{also } P_L = U \cdot I = 0 \\ R_L \rightarrow \infty: & U = U_L & I = 0 & \text{also } P_L = U \cdot I = 0 \end{array} \quad \text{Dazwischen gibt es ein } \underline{\text{Maximum}}.$$

Allgemein:

$$P = U \cdot I \text{ und weil } I = \frac{U_0}{R_i + R_L} \text{ und}$$

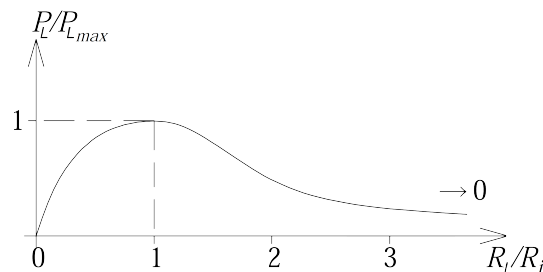
$$U = R \cdot I = U_0 \cdot \frac{R}{R_i + R_L}, \text{ ist}$$

$$P_L = U \cdot I = U_0^2 \cdot \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} \Rightarrow P_L = 0 \text{ für } R_L = 0 \text{ und } R_L \rightarrow \infty$$

Das Maximum liegt bei $\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow$ An dieser Stelle ist $R_L = R_i$.

$$\text{Dort ist } P_{L_{max}} = U_0^2 \cdot \frac{R_i}{(2R_i)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{U_0^2}{R_i}.$$

Trägt man $\frac{P_L}{P_{L_{max}}}$ über $\frac{R_L}{R_i}$ auf, so ergibt sich



$$\text{Bei } R_L = R_i \text{ ist } P_L = P_{L_{max}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{U_0^2}{R_i}$$

Die maximale Leistung, die eine elektrische Energiequelle an einen Verbraucher übertragen kann, wird bei Leistungsanpassung erzielt.

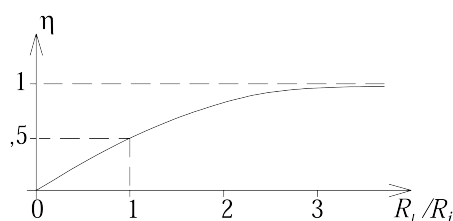
Die Gesamtleistung von Quelle und Verbraucher ist

$$P_{ges} = U_0 \cdot I = \frac{U_0^2}{R_i + R_L}$$

Ermittelt man das Verhältnis zwischen Verbraucherleistung und Gesamtleistung $\frac{P_L}{P_{ges}}$, so erhält man den Wirkungsgrad η mit

$$\eta = \frac{P_L}{P_{ges}} = \frac{R_L}{R_L + R_i} = \frac{\frac{R_L}{R_i}}{1 + \frac{R_L}{R_i}}$$

Trägt man η über $\frac{R_L}{R_i}$ auf, so erhält man den Verlauf des Wirkungsgrades.



Bei $R_L = R_i$: $\eta = 0.5$ (Leistungsanpassung)

Bei $R_L \rightarrow \infty$: $\eta = 1$ (maximaler Wirkungsgrad)

Bei Leistungsanpassung geht also 50 % der Leistung in der Quelle verloren. Stromversorgungsgeräte und Generatoren arbeiten daher im Regelfall nicht mit Leistungsanpassung, sondern mit **Spannungsanpassung** (Spannung im Verbraucher wird maximal, wenn gilt $R_i \ll R_L$).

Leistungsanpassung wird mitunter bei der Übermittlung von Informationen eingesetzt, da einer Signalquelle oft nur eine geringe elektrische Leistung zur Verfügung steht.

3.8 Schaltung mit nichtlinearen Zweipolen

Es gelten weiterhin

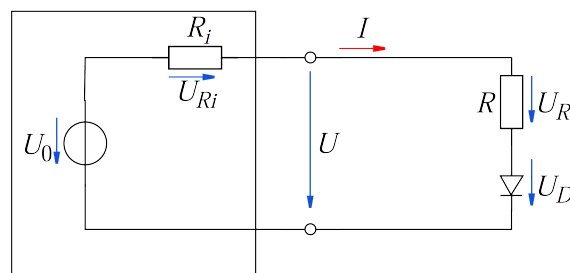
- Knotenregel für Ströme
- Maschenregel für Spannungen

aber: es sind Bauelemente (Zweipole) enthalten, für die keine lineare Beziehung vorhanden, für die jedoch eine eindeutige Beziehung $U = f(I)$ gilt. Diese Beziehung zwischen U und I ist entweder

- explizit bekannt, z. B. Diode: $U_D = \frac{kT}{e} \ln\left(1 + \frac{I}{I_0}\right)$
- als Kennlinie aufgenommen (Grafik)
- für die in der Schaltung enthaltenen linearen Zweipole weiterhin durch $U = I \cdot R$ gegeben.

Die Schaltungen lassen sich daher eindeutig, oft aber nicht mehr geschlossen, sondern nur graphisch oder numerisch berechnen.

Beispiel: Schaltung mit einer Diode



Maschenregel: $-U_0 + U_{R_i} + U_R + U_D = 0$

Durch alle Bauelemente fließt I und es gilt:

$$U_D = \frac{kT}{e} \ln\left(1 + \frac{I}{I_0}\right) \quad (\text{nicht linearer Zweipol})$$

$$\left. \begin{array}{l} U_{R_i} = R_i \cdot I \\ U_R = R \cdot I \end{array} \right\} \quad (\text{Ohm'sches Gesetz})$$

$$\text{also: } \left[-U_0 + (R_i + R) \cdot I \right] + \left[\frac{k \cdot T}{e} \cdot \ln\left(1 + \frac{I}{I_0}\right) \right] = 0$$

Hierfür lässt sich keine geschlossene Lösung finden.

Grafische Lösung:

Wir stellen die obige Beziehung um und suchen den Strom I , bei dem der rechte und der linke Term gleich werden.

$$\underbrace{\left[\frac{k \cdot T}{e} \cdot \ln \left(1 + \frac{I}{I_0} \right) \right]}_{\text{Diodenkennlinie}} = \underbrace{\left[U_0 - (R_i + R) \cdot I \right]}_{\text{Widerstandsgerade}}$$

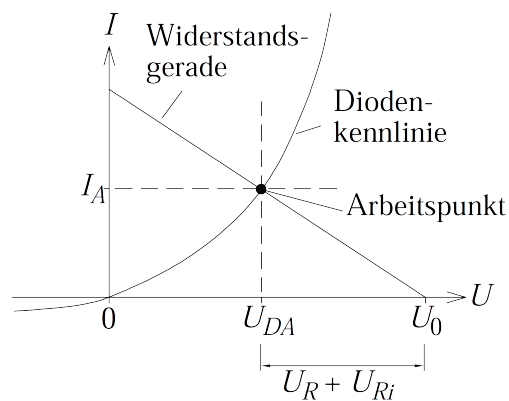
Diodenkennlinie

Widerstandsgerade

Der linke Term stellt einen passiven nichtlinearen Zweipol (Diode) dar, der rechte einen aktiven linearen Zweipol (Quelle mit Innenwiderstand $R = R_i$).

Beide Zweipole sind miteinander verbunden, so dass Spannung und Strom bei Beiden übereinstimmen muss.

Zeichnet man für beide die Strom-Spannungs-Kennlinie, so ist diese Bedingung am Schnittpunkt erfüllt. Dieser Schnittpunkt heißt Arbeitspunkt (U_{DA}, I_A) und in diesem Punkt sind alle Bedingungen der Schaltung erfüllt.



KAPITEL 4

Elektrisches Feld

Vereinfachung der Grundgesetze für die Elektrostatik:

Was heißt 'Elektro-statik'?

'*Elektro-*': Wir wollen uns zunächst nur mit *elektrischen* Feldern, den darin auftretenden Kräften und deren Wirkungen beschäftigen, nicht mit magnetischen Feldern und Kräften.

'*statik*': Wir wollen uns zuerst nicht mit zeitlich veränderlichen Feldern befassen.

Nur elektrische Felder bedeutet: $\vec{B}=\mathbf{0}$

Aus der Loretzkraft: $\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ wird die Gleichung

Elektrische Kraft

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \quad (4.1)$$

Welchen Sinn hat diese Vereinfachung?

- Es gibt genügend elektrotechnische Aufgabenstellungen, die damit gelöst werden können.
- Die mit diesen Vereinfachungen gefundenen Formeln gelten dann aber nur für elektrostatische Probleme.

Frage: Gehört es noch zur Elektrostatik, wenn Kräfte auf Ladungen berechnet werden, die sich im elektrostatischen Feld bewegen also ein Magnetfeld erzeugen?

Ja, denn es war vereinbart, die Felder der betrachteten Ladungen nicht in die Kraftberechnung einzubeziehen.

4.1 Die elektrische Ladung und ihre Wirkung

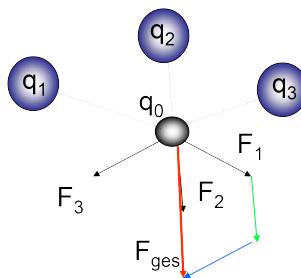
- Alle Körper sind aus Atomen bzw. Molekülen aufgebaut, wobei Moleküle aus zwei oder mehreren Atomen bestehen.
- Jedes Atom besteht aus einem positiv geladenen Atomkern und einer negativ geladenen Atomhülle.

- Der Atomkern enthält die positiv geladenen Protonen und die elektrisch neutralen Neutronen.
- In der Atomhülle befinden sich die negativ geladenen Elektronen.
- Jedes Atom und in der Regel auch jeder Körper ist elektrisch neutral, d.h. er besitzt genauso viele Protonen wie Elektronen.
- Durch
 - elektrochemische Vorgänge (z.B. $\text{H}_2\text{O} \rightarrow 2\text{H}^+ + \text{O}^{--}$)
 - Reiben (z.B. Kunststoffstab mit Fell; Bandgenerator)
 können Elektronen von einem Atom (Körper) auf ein anderes Atom (Körper) übergehen.
- Ein Körper heißt positiv (negativ) geladen, wenn auf ihm Elektronenmangel (Elektronenüberschuss) vorliegt.

Einen Raum oder Bereich, in dem Kräfte auftreten, bezeichnet man in der Physik als Feld. Innerhalb des Gravitationsfeldes z. B. wird auf eine Masse eine Kraft ausgeübt.

Ein elektrisches Feld entsteht in der Umgebung von geladenen Körpern. Innerhalb eines elektrischen Feldes wird auf eine Ladung eine Kraft ausgeübt.

Frage: Wie groß ist die Kraft auf eine Testladung q_0 wenn sie in das Ladungssystem q_1 , q_2 und q_3 gebracht wird?

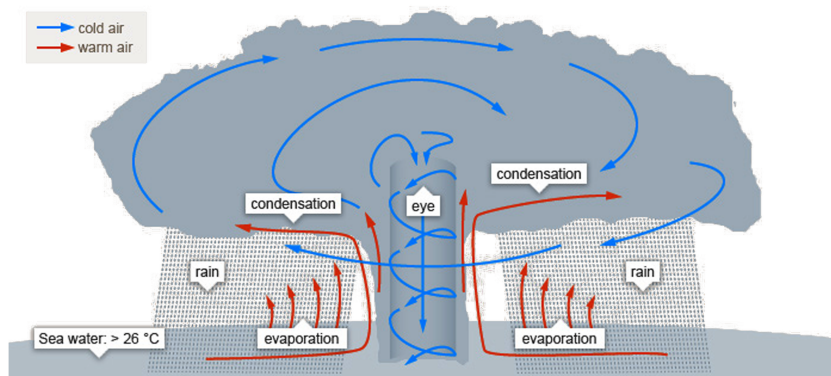


Es gilt das Superpositionsprinzip :

Resultierende Kraft ist vektorielle Summe der Einzelkräfte, kann für jede Position im Raum gefunden werden $\rightarrow$ Vektorfeld.

Beispiel: Windverteilung in Wirbelsturm

Stärke und Richtung zeitlich und örtlich veränderlich $\rightarrow$ zeitanhängiges Vektrofeld (www.windy.com).



4.2 Die elektrischen Feldgrößen

Betrachtet wird eine Ladung $|Q_+|$

→ diese verursacht eine Wirkung (Gegenladung $|Q_-|$ im ∞ gedacht)

Die elektrische Feldstärke wirkt Kraft F auf die Probeladung aus. Somit ist $F \sim Q$.

Die Proportionalitätskonstante wird durch die Stärke des Feldes ausgedrückt, durch die elektrische Feldstärke $\vec{E}$: $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$, umgestellt:

Elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \quad (4.2)$$

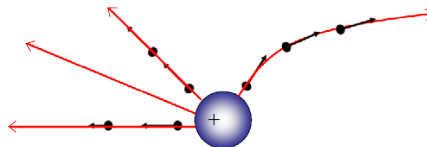
Die in einem beliebigen Raumpunkt vorhandene elektrische Feldstärke $\vec{E}$ ist dadurch definiert, dass man die Kraft $\vec{F}$, die auf eine Probeladung Q ausgeübt wird, durch die Probeladung teilt.

Beachtung der Richtung:

für E : immer von Q_+ nach Q_-

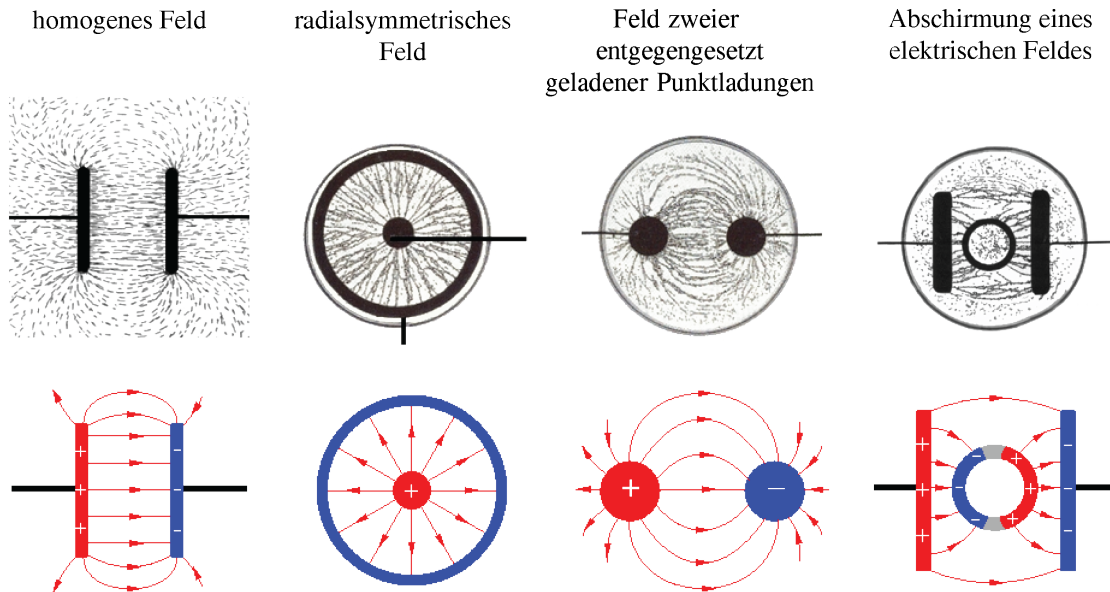
für F : $Q_1 = Q_2$: stoßen sich ab $Q_1 \neq Q_2$: ziehen sich an

Feldlinien: Richtung der Coulombkraft auf eine positive Ladung ist gleich der Tangente an die Feldlinie.



- Elektrische Feldlinien beginnen immer bei einer positiver Ladung und enden bei einer negativen Ladung.
- Ende bzw. Anfang kann bei Monopolen auch im Unendlichen sein
- Feldlinien überkreuzen sich nicht und haben keine Wirbel (geschlossene Feldlinien) falls Ladungen sich nicht bewegen.
- Dichte der Feldlinien ist Maß für die Stärke des Feldes
- Feldlinien stehen immer senkrecht auf der Elektrodenoberfläche.
- Feldlinien in Nähe eines Monopols sind kugelsymmetrisch.

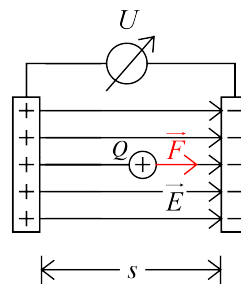
Beispiel: Wichtige elektrische Feldformen



4.2.1 Elektrische Feldstärke

Homogenes elektrisches Feld:

Ein elektrisches Feld heißt homogen, wenn die Feldstärke $\vec{E}$ (nach Betrag und Richtung) überall gleich ist. Beispielsweise ist das elektrische Feld zwischen zwei Kondensatorplatten im Abstand s (vom Randbereich abgesehen) homogen.



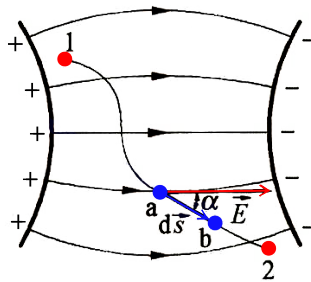
Ladung Q_+ wird eingebracht. Bei Bewegung nach links muß Kraft aufgebracht werden. Wir können die Anordnung als eindimensionales Gebilde betrachten und damit wird $\vec{F} = Q\vec{E}$ zu

$$\begin{aligned} \text{Kraft} & F = QE \\ \text{Aufzuwendende Energie} & \\ \text{bei Plattenabstand } s: & W = Fs = QEs \\ \text{Es gilt auch:} & W = QU \Rightarrow U = Es \end{aligned}$$

Elektrische Feldstärke

$$E = \frac{U}{s} \quad (4.3)$$

$$\text{Hieraus die Einheit: } [E] = \frac{\text{N}}{\text{As}} = \frac{\text{VAs}}{\text{Asm}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Inhomogenes elektrisches Feld:

Gesucht ist die Spannung U zwischen beiden Punkten 1 und 2.

- Feldstärke E ist bekannt
- beliebiger Weg s
- Punkt a : Hier gilt das Wegelement und der Vektor
- Der Betrag von $\vec{E}$ in Richtung von $d\vec{s}$ ist: $E \cdot \cos(\alpha)$

Damit wird eine kleine differentielle Spannung dU :

$$dU = E \cdot \cos(\alpha) ds = \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.4)$$

$\vec{E} \cdot d\vec{s}$ ist das skalare Produkt (oder **Skalarprodukt**) der Vektoren.

Durch Aufsummieren / Integration der kleinen Teilspannungen dU wird:

Spannung

$$U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} \quad (4.5)$$

- Die Spannung U ist das **Wegintegral** der Feldstärke E
- Unabhängig vom Weg s
- Punkte besitzen ein Potential

4.2.2 Elektrisches Potential

Unter dem Potential φ versteht man die Spannung, die ein betreffender Punkt gegen einen Bezugspunkt hat.

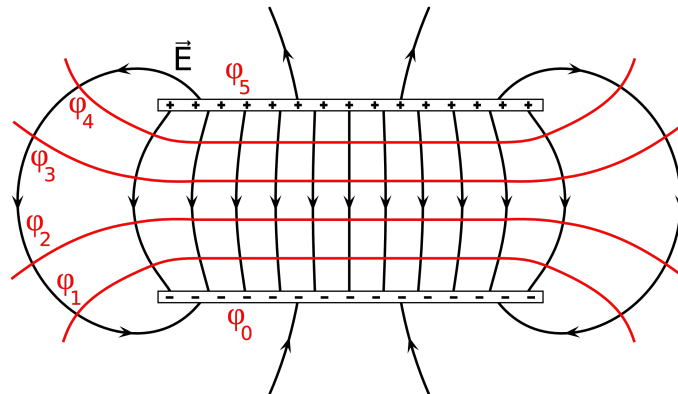
Verbindungen von Punkten gleichen Potentials ($\varphi = \text{const.}$) sind Äquipotentiallinien (Potentialflächen). In einem skalaren Feld kann man alle Punkte mit gleicher Feldgröße verbinden (vgl. Temperaturfeld: Isothermen, Druckfeld: Isobaren).

Es gilt:

Spannung

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (4.6)$$

Beachte: Feldlinien sind immer senkrecht zu Äquipotentialflächen (längs Äquipotentialflächen ist $\nabla^2 \varphi \rightarrow \text{div}(\text{grad } \varphi) = 0$). Feldlinien treten stets senkrecht aus/ein.

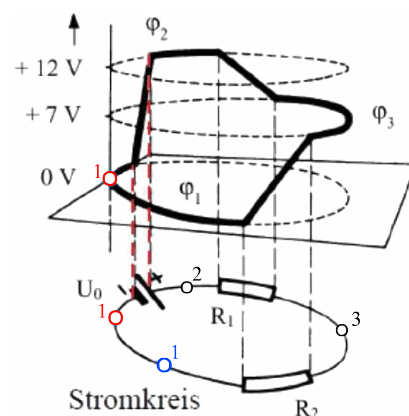
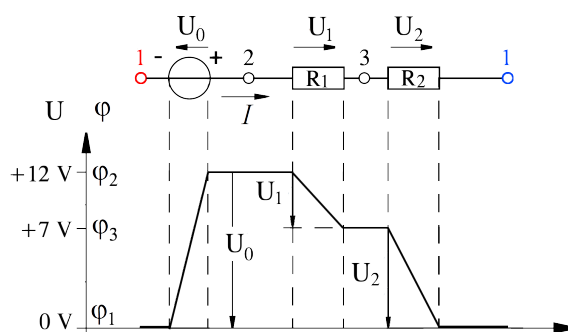


Wird im Bild die untere Platte als Bezugspunkt gewählt und $\varphi_0 = 0V$ gesetzt, so haben die weiteren Potentialflächen die Werte:

$$\varphi_5 = U \quad \varphi_4 = \frac{4}{5}U \quad \varphi_3 = \frac{3}{5}U \quad \varphi_2 = \frac{2}{5}U \quad \varphi_1 = \frac{1}{5}U$$

Beispiel: Elektrischer Schaltkreis

Das zweite Kirchhoff'sche Gesetz gilt nun unabhängig davon, ob ein Strom fließt (d.h. ein Leiter vorhanden ist) oder nicht.



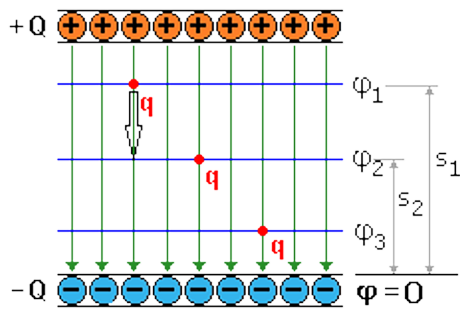
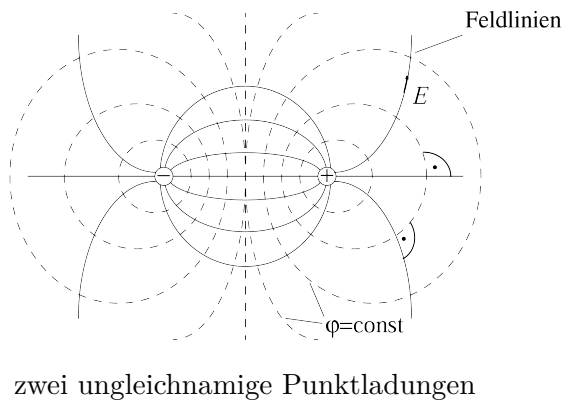
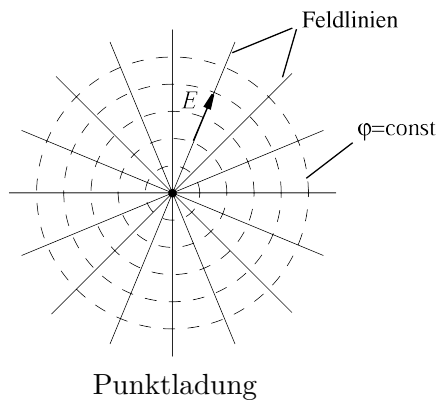
Beispiel: Gravitation

Elektrisches Feld

Höhe h	$\Longleftrightarrow$	Potential φ
Höhendifferenz Δh	$\Longleftrightarrow$	elektrische Spannung U
Masse m	$\Longleftrightarrow$	Ladung Q
Gefälle (Abtriebskraft $\vec{G}$)	$\Longleftrightarrow$	Elektrisches Feld $\vec{E}$ (Kraft auf eine Probeladung)

Beispiele:

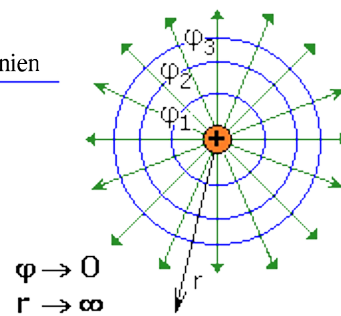
Feld und Äquipotentialflächen:



homogenes E-Feld

Äquipotenziallinien

Nullpotential



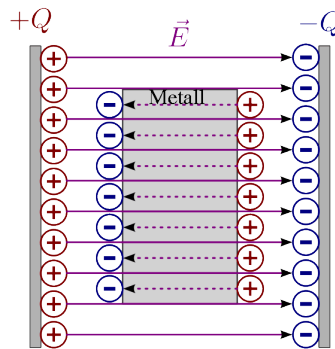
inhomogenes radiales E-Feld

4.2.3 Elektrischer Fluss (Verschiebungsfluss Ψ)**Elektrische Influenz und Faradayischer Käfig**

Bringt man ein Stück Metall in ein elektrisches Feld ein, so bewirkt dieses eine Verschiebung der frei beweglichen Elektronen zur positiven Platte hin; an der zur negativen Platte hin orientierten Seite bleiben die positiv geladenen Atomrümpfe übrig.

Dieser als "elektrische Influenz" bezeichnete Effekt hält so lange an, bis sich im Metall durch die Ladungsverschiebung ein gleich starkes, aber entgegengesetzt gerichtetes Feld einstellt.

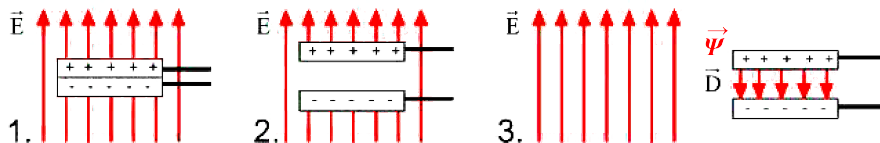
Diese Trennung (Erzeugung) der Ladung wird als Influenz bezeichnet.



Im Inneren des Metalls überlagern sich das äußere und das induzierte elektrische Feld. Da beide Felder gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sind, bleibt das Innere des Metalls somit **feldfrei**.

Dies gilt nicht nur für massive metallische Körper, sondern auch für metallische Hohlkörper.

In der Technik stellen beispielsweise Autokarosserien so genannte 'Faradayische Käfige' dar (benannt nach Michael Faraday), welche die Insassen vor elektrischen Feldern und damit auch vor Stromflüssen, beispielsweise Blitzen, schützen.



Die elektrische Feldstärke E ist lediglich die Wirkung für die Entstehung der Kraft F und der Spannung U , aber nicht die Ursache.

Die Ursache kann mit der Einführung des elektrischen Flusses Ψ beschrieben werden.

Die Gesamtheit des elektrischen Feldes das influenziert wurde bezeichnet man als den elektrischen Fluss Ψ . Es gilt die Definition:

Elektrischer Fluss (Psi)

$$\Psi = Q \quad (4.7)$$

Mit der Einheit $[\Psi] = \text{As} = \text{C}$

Der Fluss ist über die Fläche A verteilt. Ψ durch A geteilt wird definiert als elektrische Flussdichte $D = \frac{\Psi}{A}$.

Elektrische Flussdichte

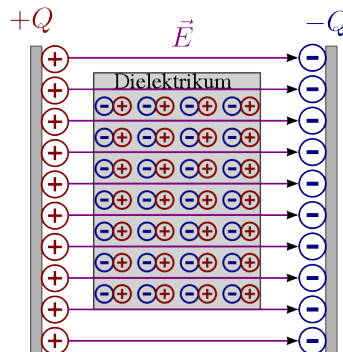
$$D = \frac{Q}{A} \quad (4.8)$$

Mit der Einheit $[D] = \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$.

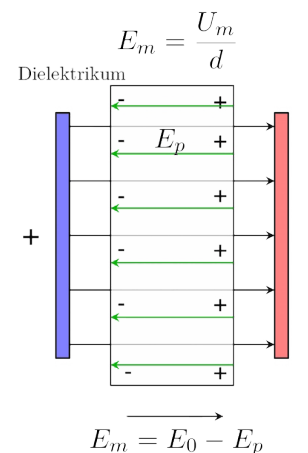
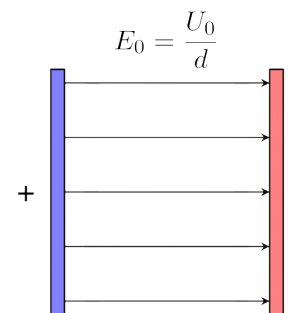
Häufig wird D auch als **dielektrische Verschiebung** bezeichnet.

4.2.4 Nichtleiter im elektrischen Feld

Ein Nichtleiter der von einem elektrischen Feld E durchsetzt wird, wird als **Dielektrikum** bezeichnet.



- Wird ein Nichtleiter in ein elektrisches Feld E_0 eingebracht, so können die Ladungen innerhalb des Nichtleiters nicht frei bewegt werden.
- Es treten *lokale Ladungsverschiebungen* innerhalb des Nichtleiters auf (**Polarisation**). Aufbau eines Gegenfeldes E_P .
- Das ursprüngliche Feld E_0 wirkt durch den Isolator hindurch, wird jedoch um das Gegenfeld E_P vermindert.
- Das resultierende Feld E_m ist damit $E_m = E_0 - E_P$
- Das *Innere* des Nichtleiters ist *nicht feldfrei*.
- $E_m < E_0$



Dielektrikum- Polarisationsmechanismen:

- Elektronische Polarisation Auslenkung von Atomkern und -hülle (z.B. Keramikkondensator)- es entstehen Dipole
- Ionische Polarisation Auslenkung von Kationen und Anionen (z.B. Elektrolytkondensator)
- Orientierungspolarisation Ausrichtung von permanenten Dipolen (z.B. Tonband)
- Ansammlung von freien Ladungsträgern an isolierten Korngrenzen (z.B. Ferritkerne)

Die Polarisation hat zur Folge, dass sich dem äußeren Feld ein inneres Feld überlagert. Daraus resultiert eine Verringerung des elektrischen Feldes E (bei vorgegebener Flussdichte D), es gilt: $D \sim E$ und mit einer Proportionalkonstante ε :

$$D = \varepsilon E \quad (4.9)$$

Allgemein gilt somit der Zusammenhang:

Elektrische Flussdichte

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (4.10)$$

⇒ Danach ist das Vektorfeld von D bis auf eine Konstante ε mit dem Vektorfeld der elektrischen Feldstärke E identisch.

⇒ D selbst ist unabhängig vom Stoff (Material) Die Konstante ε wird als Permittivität oder Dielektrizitätskonstante bezeichnet.

Im leeren Raum kann keine Polarisierung auftreten. **Frage:** Warum?

Die Permittivität im Vakuum wird mit ε_0 bezeichnet.

Für festgelegtes D und E gilt:

Permittivität im Vakuum

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \quad (4.11)$$

Die Permittivität beliebiger Stoffe lässt sich angeben als:

Allgemeine Permittivität

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (4.12)$$

ε_r wird Permittivitätszahl (auch: **relative** Dielektrizitätskonstante) genannt und ist ein dimensionsloser Faktor.

Im leeren Raum ist somit: $\varepsilon_r = 1$

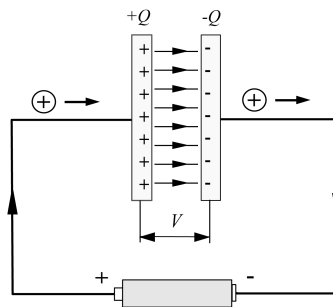
In Materialtabellen werden die relativen Dielektrizitätszahlen ε_r bei einer Temperatur von 20 °C angegeben.

Material	Dielektrizitätszahl ε_r
Vakuum	1
Luft	1,00059
Harzöl	2
Holz (trocken)	2 bis 3,5
Porzellan	2 bis 6
Gummi	3
Erde (trocken)	4
Glas	5 ... 8
Diamant	16,5
Wasser	80
Metalle	≫ 10.000

KAPITEL 5

Der Kondensator

Kondensatoren sind Bauelemente, die elektrische Ladungen bzw. elektrische Energie speichern können.



5.1 Definition der Kapazität

So wie zwischen den Feldgrößen E und D ein Proportionalitätsfaktor ε eingeführt worden ist, kann auch ein Faktor zwischen den skalaren Größen U und Q eingeführt werden.

Der Proportionalitätsfaktor zwischen U und Q heißt *Kapazität* C . Er berücksichtigt die Feldanordnung (Geometrie) und die Materialeigenschaften.

Die Kapazität ist eine skalare Größe, mit ihr lässt sich einfacher rechnen als mit den vektoriellen Feldgrößen.

Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} \quad (5.1)$$

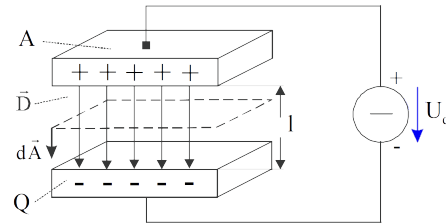
Mit der Einheit $[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{\text{As}}{\text{V}} = 1 \text{ F (Farad)}$

5.2 Kapazität des Plattenkondensators

Berechnung der Kapazität eines Plattenkondensators in drei Schritten:

1. Berechnung der Ladung:

$$\begin{aligned}
 Q &= \oint \vec{D} \cdot \vec{A} \\
 &= D \cdot \cos(0^\circ) \cdot \int dA \\
 &= D \cdot A = \varepsilon \cdot E \cdot A \\
 &= \varepsilon \cdot \frac{U}{l} \cdot A
 \end{aligned}$$



2. Berechnung der Spannung:

$$U = U_q$$

3. Berechnung der Kapazität:

Kapazität Plattenkondensator

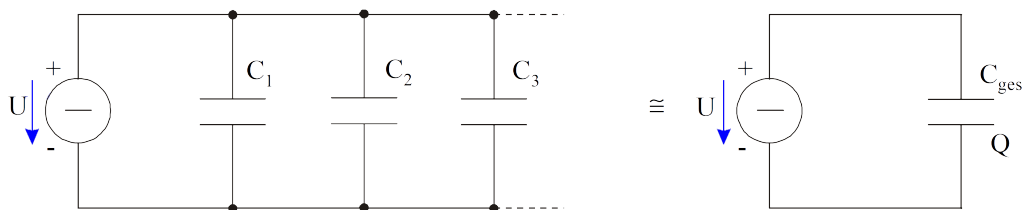
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon U A}{l U} = \varepsilon \frac{A}{l} \quad (5.2)$$

Merke:

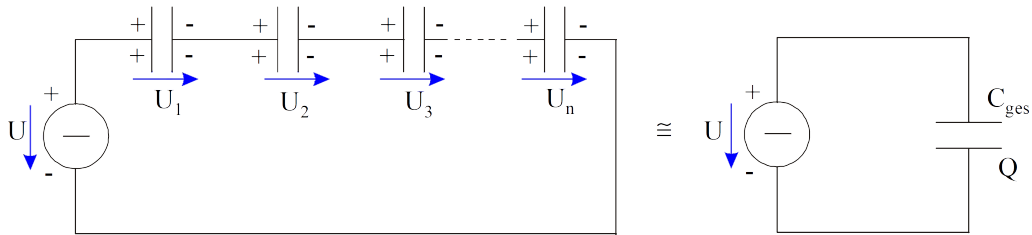
Die Kapazität C eines Kondensators ist allein von der Geometrie der Elektroden und den Materialeigenschaften des nichtleitenden Raumes - des Dielektrikums - zwischen den Elektroden abhängig.

5.3 Zusammenschaltung von Kondensatoren

Parallelschaltung von Kondensatoren:



$$\begin{aligned}
 Q_{ges} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n \\
 &= C_1 U + C_2 U + C_3 U + \dots + C_n U \\
 \frac{Q_{ges}}{U} &= C_{ges} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n
 \end{aligned}$$

Reihenschaltung von Kondensatoren:

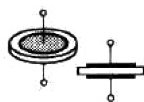
$$U_{ges} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots + \frac{Q}{C_n}$$

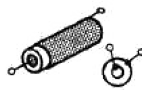
$$\frac{U_{ges}}{Q} = \frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Begründung: für $Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q$

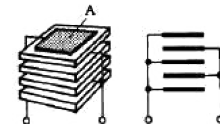
Ein gleicher Verschiebestrom hat gleiches Q auf jedem Kondensator zur Folge.

5.4 Technische Ausführungen von Kondensatoren

Plattenkondensator



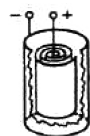
Röhrchenkondensator



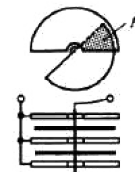
Schichtkondensator



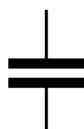
Wickelkondensator



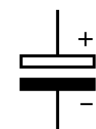
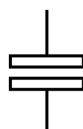
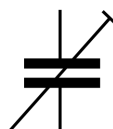
Elektrolytkondensator



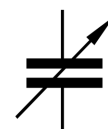
Drehkondensator

Schaltzeichen:

Kondensator

Elektrolyt-
kondensatorBipolarer
Elektrolyt-
kondensator

Trimmer

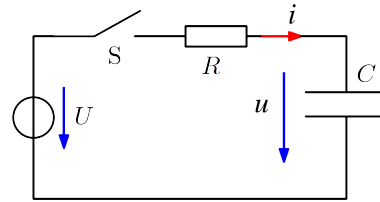


Drehkondensator

5.5 Energie des geladenen Kondensators

In jedem aufgeladenen Kondensator ist Energie gespeichert.

- C wird mit U über R verbunden
- Aufladevorgang
- C nimmt in kleiner Zeit eine kleine Menge Energie $dW = u \cdot idt$ auf



Die zugeführte Ladung idt ist gleich der gespeicherten Ladung Cdu .

$$dW = uCdu$$

Es wird

$$W = C \int_0^U u du = C \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^U = \frac{1}{2} CU^2$$

Da die Spannung beim Laden bzw. Entladen nicht konstant ist, sondern die Spannung proportional zur Ladungsmenge steigt, gilt hier **nicht** $W = Q \cdot U$!

Für jedes Ladungselement muss mit Steigung der Spannung immer mehr Arbeit verrichtet werden.

Energie gespeichert im Kondensator

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (5.3)$$

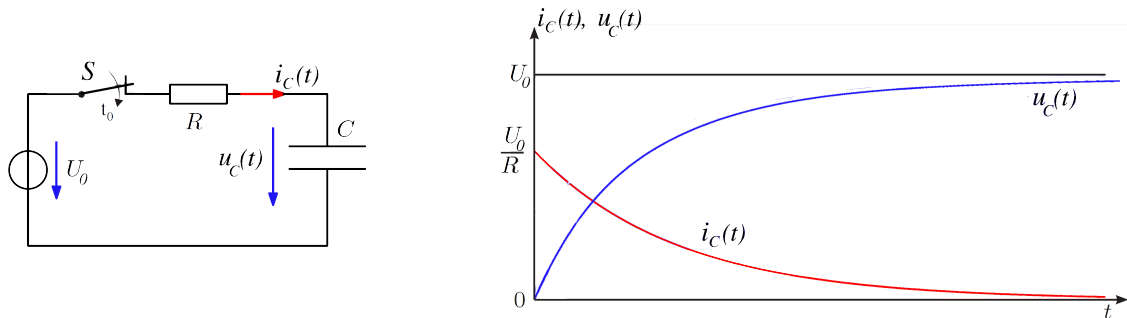
Dies ist diejenige Energie W die in einem Kondensator C bei der anliegenden Spannung U gespeichert ist, bzw. mit $(Q = CU)$ die Energie bei der aufgenommenen Ladung Q gespeichert ist.

5.6 Schaltverhalten von Kondensatoren

Kondensatoren sind Bauelemente, die ähnlich einer Batterie Spannungen speichern können. Im folgenden soll untersucht werden, welches elektrische Verhalten Kondensatoren besitzen.

Um eine Spannungsspeicherung zu erhalten, muß Strom in den Kondensator fließen.

Nachfolgende Messung zeigt den Spannungs- bzw. den Stromverlauf beim Aufladevorgang eines Kondensators durch eine Spannungsquelle.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S geschlossen. Die Spannung am Kondensator erhöht sich stetig, bis die Spannung der Quelle erreicht wird.

Gleichzeitig sinkt der Strom stetig. Zu Beginn des Vorgangs wird sogar Kurzschlußstrom erreicht ($i_c(t) = \frac{U_0}{R}$).

Strom und Spannung am Kondensator:

Kondensatoren wirken für Gleichstrom wie Isolatoren. Ströme fließen nur beim Aufladen und Entladen. Strom und Spannung sind damit zeitabhängig.

Verbindung zw. $u(t)$ und $i(t)$: $u(t) = \frac{Q(t)}{C}$ bzw. $i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$

Differenzieren nach dt : $\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dQ(t)}{dt} \Rightarrow \frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$

Kondensatorstrom

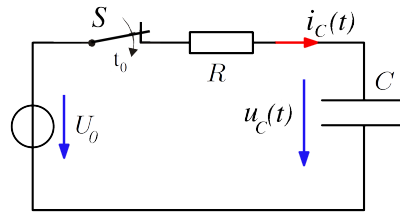
$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \quad (5.4)$$

Durch Umstellung und Integration beider Seiten kann die Spannung $u(t)$ über die Integration des Stroms $i(t)$ äquivalent dargestellt werden:

Kondensatorspannung

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (5.5)$$

5.7 Schaltverhalten von RC-Glied



Der Ladestrom des Kondensators:

Über dem Kondensator liegt keine Spannung bei $t_0 = 0$ an, $u_C = 0$ V. Beim Einschaltvorgang wird der Ladevorgang lediglich durch den Widerstand R begrenzt.

Für den (Kurzschluss-)Strom gilt: $i(0) = i(t = t_0) = \frac{U_0}{R}$

Für die Spannungen gilt: $u_R(t) = i(t) \cdot R$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot Q(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Maschenregel: $U_0 = u_R(t) + u_C(t) = i(t) \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$

Ableitung nach dt : $\frac{dU_0}{dt} = \frac{di(t)}{dt} \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \int \frac{di(t)}{dt} dt$

$U_0 = const.:$ $0 = \frac{di(t)}{dt} \cdot R + \frac{1}{C} \cdot i(t)$

Trennung der Variablen: $\frac{di(t)}{dt} \cdot \frac{1}{i(t)} = -\frac{1}{RC}$ (DGL 1. Ordnung)

Integration 0 bis t : $\int_0^t -\frac{1}{RC} d\tau = \int_0^t \frac{1}{i(\tau)} \cdot \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau$

Aufgelöst: $\left[-\frac{\tau}{RC} \right]_0^t = \left[\ln(i(\tau)) \right]_0^t$

Grenzen eingesetzt: $-\frac{t}{RC} - (-0) = \ln(i(t)) - \ln(i(0)) = \ln \frac{i(t)}{i(0)}$

e-Fktn anwenden: $e^{-\frac{t}{RC}} = e^{\ln \frac{i(t)}{i(0)}} = \frac{i(t)}{i(0)}$

Anfangsbedingung: $i(0) = \frac{U_0}{R}$

Ladestrom des Kondensators

$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.6)$$

Die Ladespannung des Kondensators:

Maschenumlauf: $U_0 = u_R(t) + u_C(t)$

Umgestellt und u_R ersetzt: $u_C(t) = U_0 - i(t) \cdot R$

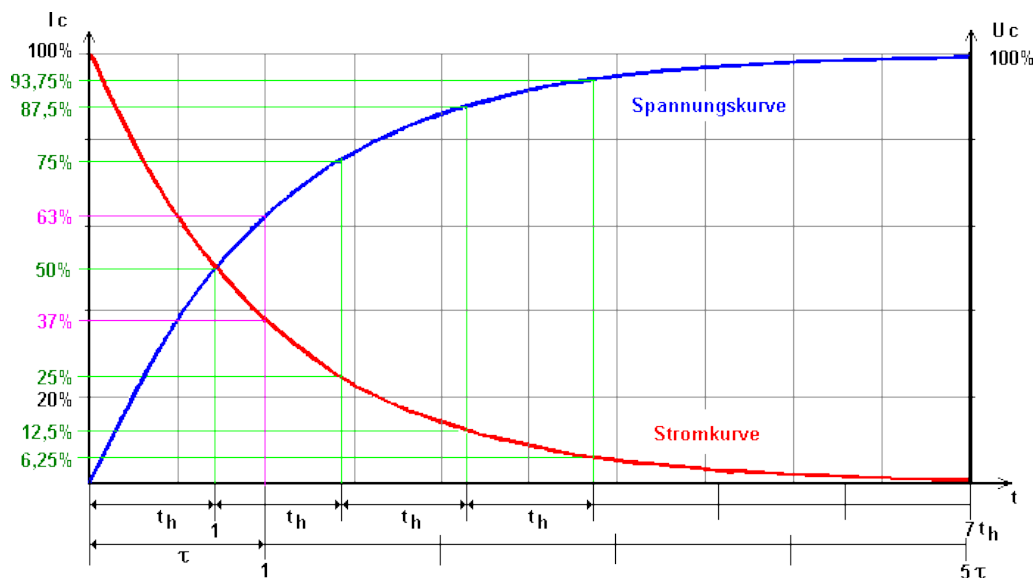
Mit $i(t)$ von oben:

Ladespannung des Kondensators

$$u_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (5.7)$$

Zeitkonstante $\tau = RC$

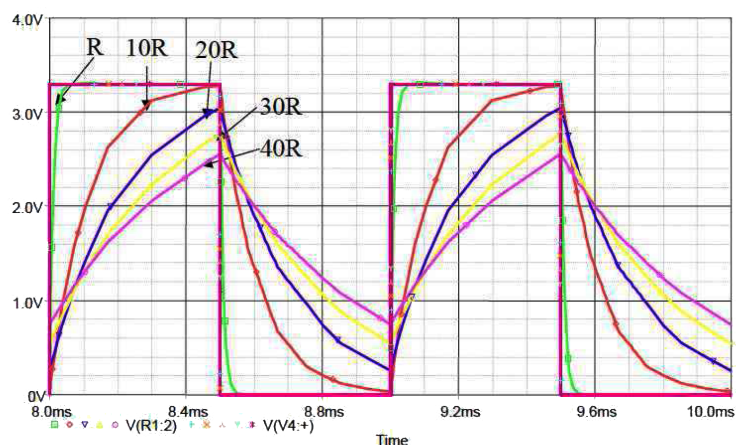
Faustformel : Nach $\sim 5\tau$ ist die Aufladung beendet (99.3% geladen).



Die Berechnung des Entladestromes bzw. Entladespannung läuft analog zu den Aufladevorgängen und wird hier nicht noch einmal durchgeführt.

Beispiel:

Darstellung der Spannung am Kondensator für zwei Lade und Entladevorgänge für unterschiedliche Zeitkonstanten $\tau = RC$ (Widerstand R variiert).



KAPITEL 6

Magnetisches Feld

6.1 Allgemeines zum magnetischen Feld

Ein ungeladener, stromführender Leiter übt auf einen anderen stromführenden Leiter eine Kraft aus.

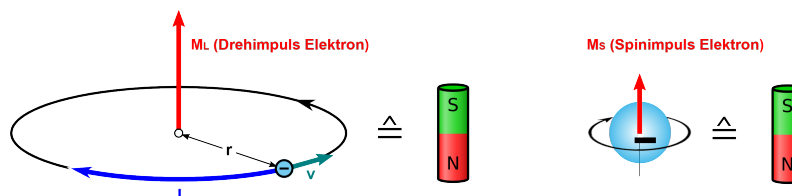
→ mit Vorhandensein eines elektrischen Feldes nicht erklärbar.

Elektrischer Strom versetzt umgebenden Raum in diesen Zustand.

→ Raumzustand wird als magnetisches Feld bezeichnet.

Auch ein Dauermagnet besitzt ein magnetisches Feld. Die Ursache liegt in der Bewegung von Ladungsträgern.

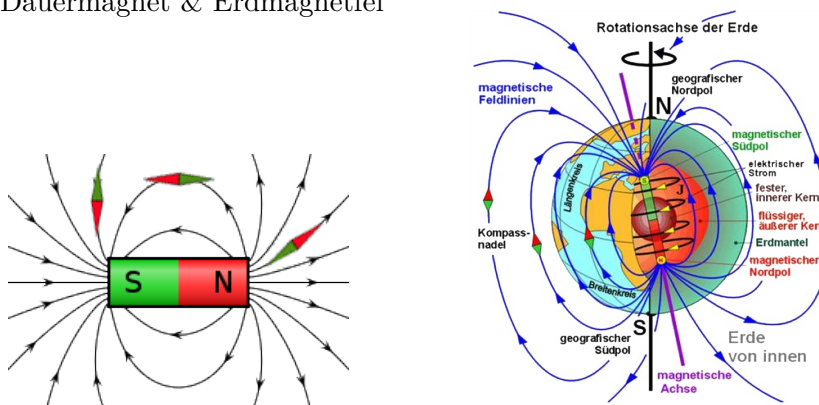
Kreisströme der Elektronen und Rotation (Spin) erzeugen kleinste, magnetische Felder.



Die sich durch eine Magnetnadel ergebenden Richtungen kann man durch Linien darstellen:
Bezeichnung:

Magnetische Feldlinien → Magnetfeld übt eine Kraft aus (vgl. Kompassnadel).

Beispiel: Dauermagnet & Erdmagnetfel



6.2 Magnetische Feldgrößen

Vereinfachung der Grundgesetze für die Magnetostatik:

'Magneto-': Wir wollen uns nur mit magnetischen Feldern, den darin auftretenden Kräften und deren Wirkungen beschäftigen, nicht mit elektrischen Feldern und Kräften.

'statik': Wir wollen uns zuerst mit zeitlich unveränderlichen magnetischen Feldern befassen.

Wir betrachten nur magnetische Felder, heißt: $\vec{E} = 0$, dann wird aus der Lorentz-Kraft:

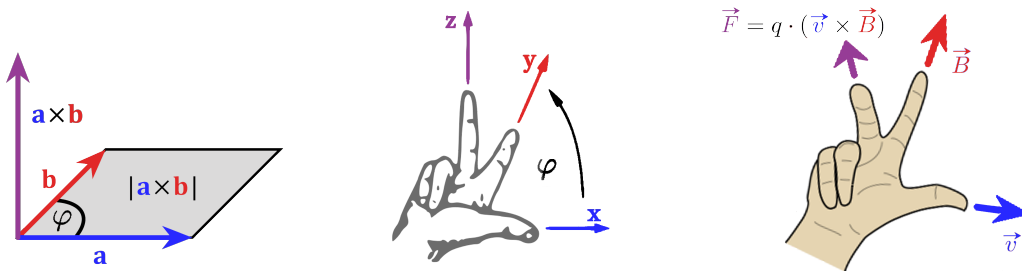
$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.1)$$

Die Schreibweise besagt:

Die Kraft ist an jedem Ort

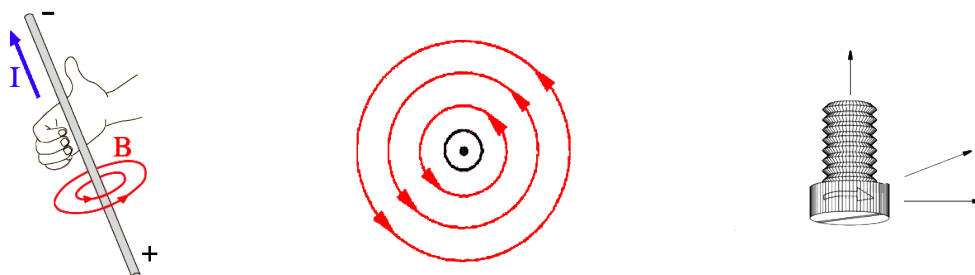
- senkrecht zur Geschwindigkeit $\vec{v}$
- senkrecht zur Feldstärke $\vec{B}$
- proportional zum Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$
- proportional zum Betrag des Feldes $|\vec{B}|$
- und proportional zum $\sin(\varphi)$ des Winkels φ zwischen $\vec{v}$ und $\vec{B}$.



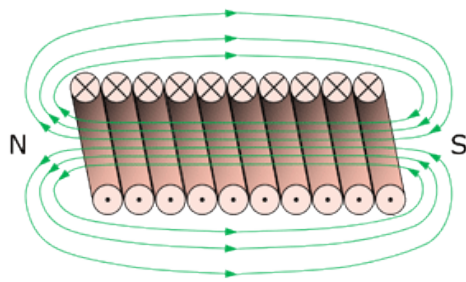
Wichtig: Rechte Handregel gilt für positive Ladungsträger q , also Strom von (+) nach (-), technische Stromrichtung!

Eine sich konstant bewegende Ladung erzeugt ein statisches magnetisches Feld $\vec{B}$.

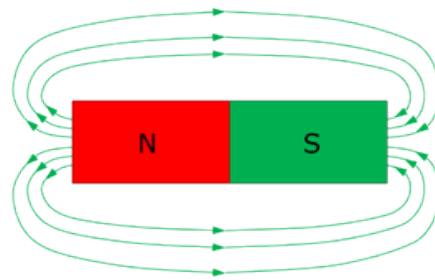
Der Stromfluss legt also eine bestimmte Richtung der magnetischen Feldlinien fest (Rechtssystem, vgl. Drehsinn einer rechtsgängigen Schraube).



Beispiel: Zylinderspule



Magnetfeld der Luftspule



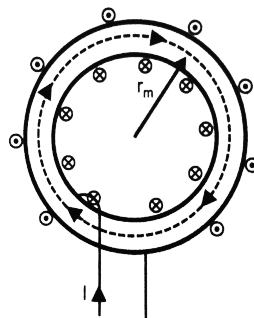
Magnetfeld eines Stabmagneten

Durch die Verwendung von Spulen können erheblich stärkere Magnetfelder erzeugt werden als in einem Einzeleiter.

Frage: Warum werden die Magnetfelder verstärkt?

6.2.1 Magnetische Feldstärke H

Durch Versuche mit einer Magnetnadel, die ein Drehmoment aufgrund der Spulenanordnung erfahren hat, hat man eine Proportionalität gefunden die $\sim$ Strom I , $\sim$ Windungszahl N und $\sim$ der (mittleren) Feldlinienlänge l war.



Man definierte daraus die Magnetische Feldstärke H in der Zylinderspule:

Magnetische Feldstärke

$$H = \frac{I \cdot N}{l} \quad (6.2)$$

Mit der Einheit $[H] = \frac{[I] \cdot [N]}{[l]} = 1 \frac{A \cdot 1}{m} = 1 \frac{A}{m}$

- Die Anzahl der Windungen N ist dimensionslos
- l ist die noch nicht definierte Länge der Feldlinien

6.2.2 Elektrische Durchflutung Θ (Theta)

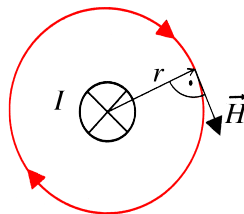
Das Produkt aus elektrischem Strom und der Anzahl der Windungen, $I \cdot N$, gibt die Gesamtmenge des Stroms an, der die durch r_m aufgespannte Fläche durchflutet. Aus diesem Grund erhält diese Kenngröße ein eigenes Symbol Θ (Theta) und wird als magnetische- oder auch elektrische Durchflutung bezeichnet:

Magnetische- oder Elektrische Durchflutung

$$\Theta = I \cdot N \quad (6.3)$$

Mit $H = \frac{I \cdot N}{l}$ erhält man:

$$H = \frac{\Theta}{l} \quad (6.4)$$



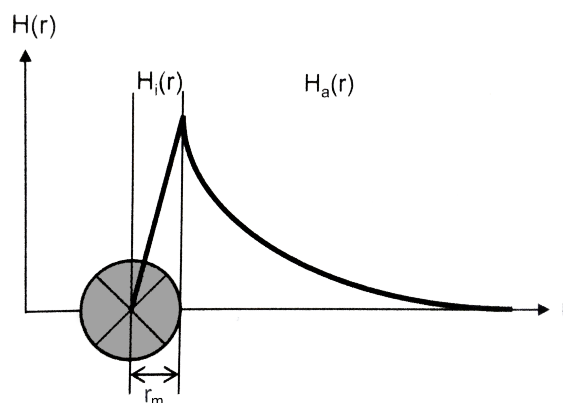
Bei einem Einzelleiter, der durch den inneren Ring mit dem Kreuz dargestellt ist (Strom I fließt hinein), kann man die Feldstärke H mit $l = 2\pi r$ und $\Theta = I$ berechnen.

Magnetische Feldstärke Einzelleiter

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (6.5)$$

Fließt der Strom I in die Zeichenebene hinein, führt dies zu einer Feldlinie $\vec{H}$, die nach der Rechten-Hand-Regel im Uhrzeigersinn um den Leiter herumläuft.

Diese Definition der magnetischen Feldstärke H ist die wichtigste Kenngröße des magnetischen Feldes.



Innerhalb des Leiters steigt die magnetische Feld linear an (ohne Beweis). Außerhalb des Leiters fällt das H -Feld mit $\frac{1}{r}$ ab.

Magnetische Spannung U_m

Beim elektrischen Feld $\vec{E}$ war der Spannungsabfall du zwischen zwei Punkten gegeben durch: $du = \vec{E} d\vec{s}$ bzw. $U = E \cdot s$.

Ganz analog kann man im magnetischen Feld $\vec{H}$ die magnetische Spannung U_m definieren als:

Magnetische Spannung

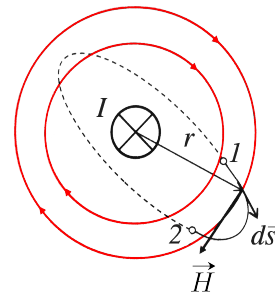
$$U_m = H \cdot s \quad (6.6)$$

Mit der Einheit $[U_m] = [H][s] = \text{A}$.

Allgemein gilt:

$$U_{m12} = \int_1^2 \vec{H} d\vec{s} = \int_1^2 H ds \cdot \cos(\alpha)$$

Dabei ist α der Winkel der von beiden Vektoren $\vec{H}$ und $d\vec{s}$ eingeschlossen wird.



Durchflutungsgesetz

Im Falle eines **geschlossen**en Weges, auch als Umlauf bezeichnet, spricht man bei der magnetischen Spannung U_m von der magnetischen Durchflutung Θ bzw. der magnetischen Umlaufspannung.

Es werden also **alle** Teilspannungen dU_m längs eines geschlossenen Weges addiert

Durchflutungsgesetz

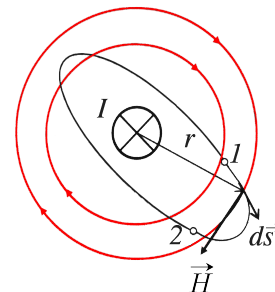
$$\Theta = \oint_S \vec{H} d\vec{s} = I \quad (6.7)$$

Für einen konzentrischen Kreis gilt:

$$U_m = H \oint_S ds = H 2\pi r$$

Mit einem Kreisumfang $2\pi r$ ergibt sich mit (Gl. 6.5):

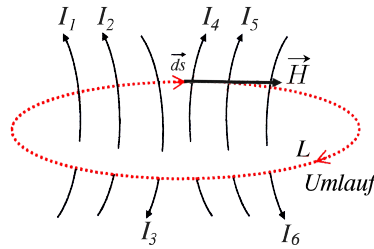
$$H 2\pi r = I$$



Die magnetische Umlaufspannung Θ ist somit gleich dem Strom I , der vom Integrationsweg umschlossen wird.

Das Durchflutungsgesetz gibt uns die Möglichkeit, aus einem elektrischen Strom I das von ihm erzeugte magnetische Feld und die zugehörige Feldstärke H zu berechnen.

Beispiel: Θ für 6 Ströme I_1 bis I_6



Im Beispiel ist für den vorgegebenen Integrationsweg L:

Für I_1 gilt: $N = 1$ und damit $\Theta = I_1$

Für I_n Beachtung der Richtung der Einzelkomponenten von H

$$\Theta = I_1 + I_2 - I_3 + I_4 + I_5 - I_6$$

Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke längs eines geschlossenen Weges (und somit die magnetische Umlaufspannung längs dieses Weges) ist gleich der elektrischen Durchflutung der Fläche, die von dem genannten Weg begrenzt wird.

6.2.3 Magnetische Flussdichte B

Ein magnetisches Feld kann man mit dem Modell Feldlinienbild beschreiben. Quantitativ lässt es sich durch die feldbeschreibenden Größen magnetische Flussdichte B und magnetische Feldstärke H charakterisieren. Die magnetische Flussdichte B , die heute vorzugsweise verwendet wird, ist folgendermaßen über die Kraftwirkung F_B der bewegten Ladung definiert (Ladung q_{el} bewegt sich senkrecht zu B):

$$B = \frac{F_B}{q_{el} \cdot v_{el}} = \frac{F_B}{I \cdot l}$$

Die magnetische Flussdichte B kann als Feldliniendichte im Magnetfeld angesehen werden.

In der magnetischen Feldstärke H sind keine Materialeigenschaften des Raumes enthalten $\Rightarrow$ Einführung der magnetischen Flussdichte (vgl. Flussdichte $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$)

Es gilt zunächst: $B \sim H \sim \frac{IN}{l}$.

Der Proportionalitätsfaktor wird als Permeabilität μ bezeichnet und es gilt:

Magnetische Flussdichte

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H \quad (6.8)$$

Mit der Einheit $[B] = \frac{N}{Am} = \frac{Vs}{m^2} = \text{Tesla} = T$

Wobei μ_0 die magnetische Feldkonstante oder Permeabilität des leeren Raums (Vakuum) und μ_r die (dimensionslose) relative Permeabilitätszahl ist.

Für die Permeabilität μ ergibt sich aus Gl. (6.8) die Einheit: $[\mu] = \frac{[B]}{H} = \frac{Vs}{Am}$

Es gilt:

Permeabilität (Vakuum)

$$\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (6.9)$$

Im Vakuum ist definitionsgemäß $\mu_r = 1$ (gilt für die meisten Stoffe).

Die Einteilung der Stoffe bzgl. μ_r :

- **Diamagnetisch: $0 \leq \mu_r < 1$**

Geringfügig kleinere Permeabilität als das Vakuum. Diamagnetische Stoffe haben das Bestreben, das Magnetfeld aus ihrem Innern zu verdrängen. Sie magnetisieren sich gegen die Richtung eines externen Magnetfeldes, folglich ist $\mu_r < 1$.

Einen Sonderfall stellen die Supraleiter 1. Art dar. Sie verhalten sich im konstanten Magnetfeld wie ideale Diamagneten mit $\mu_r = 0$. Dieser Effekt heißt Meißner-Ochsenfeld-Effekt und ist ein wichtiger Bestandteil der Supraleitung.

- **Paramagnetische: $\mu_r > 1$**

Für die meisten Materialien ist die Permeabilitätszahl etwas größer als Eins (zum Beispiel Sauerstoff, Luft) - die so genannten paramagnetischen Stoffe.

In paramagnetischen Stoffen richten sich die atomaren magnetischen Momente in externen Magnetfeldern aus und verstärken damit das Magnetfeld im Innern des Stoffes. Die Magnetisierung ist also positiv und damit $\mu_r > 1$

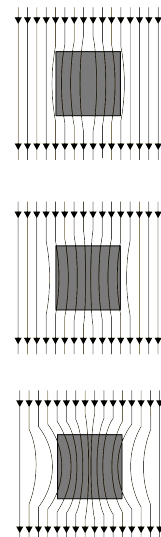
- **Ferromagnetisch: $\mu_r \gg 1$**

Besondere Bedeutung kommt den ferromagnetischen Stoffen bzw. den weichmagnetischen Werkstoffen (Eisen und Ferrite, Cobalt, Nickel) zu, da diese sehr große Permeabilitätszahlen von $\mu_r > 300$ bis zu 300.000 aufweisen.

Diese Stoffe kommen in der Elektrotechnik häufig zum Einsatz (Spule, Elektromotor, Transformator).

Ferromagneten richten ihre magnetischen Momente parallel zum äußeren Magnetfeld aus, tun dies aber in einer stark verstärkenden Weise.

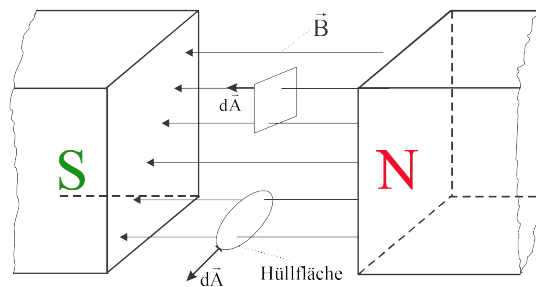
Material	Permeabilitätszahl μ_r	
Supraleiter	0	ideal diamagnetisch
Blei, Zinn	0.9999	diamagnetisch
Kupfer	0.9999936	diamagnetisch
Wasser	0,999991	diamagnetisch
Vakuum	1	paramagnetisch
Polyethylen	~ 1	paramagnetisch
Luft	1.00000004	paramagnetisch
Kobalt	80...200	ferromagnetisch
Eisen	300 ... 10.000	ferromagnetisch
Ferrite	4 ... 15.000	ferromagnetisch
Mumetall (NiFe)	50.000 ... 140.000	ferromagnetisch



6.2.4 Magnetischer Fluss Φ (Phi)

Der Magnetische Fluss (Formelzeichen Φ) ist eine skalare physikalische Größe zur Beschreibung des magnetischen Feldes. Er ist - analog zum elektrischen Strom I - die Folge einer magnetischen Spannung U_m und fließt durch einen magnetischen Widerstand R_m .

Herrscht (z.B. im Luftspalt, homogenes magnetisches Feld) die Flussdichte B , so ist Φ der magnetische Fluss, der sich auf die Fläche A verteilt (vgl. $Q = D \cdot A$ beim Plattenkondensator).



Magnetischer Fluss

$$\Phi = BA$$

(6.10)

Mit der Einheit $[\Phi] = \text{Vs} = \text{Weber} = \text{Wb}$

Allgemeine Darstellung als skalar Produkt mit einer beliebigen Fläche (Abhängig vom Winkel der Orientierung der Fläche $\vec{A}$ und der Flußdichtevektoren $\vec{B}$).

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

Da das magnetische Feld quellenfrei ist, sind die Linien der magnetischen Flussdichte immer in sich geschlossen. Dies wird in den Maxwell-Gleichungen ausgedrückt durch $\text{div} \vec{B} = 0$.

6.3 Das magnetische Ohmsche Gesetz

Nicht nur im elektrischen, sondern auch im magnetischen Feld gilt das ohmsche Gesetz.

Mit dem Durchflutungsgesetz: $\Theta = Hl = IN \Rightarrow H = \frac{IN}{l}$

und Gl. 6.10: $\Phi = BA = \mu H \cdot A = \mu \frac{IN}{l} A$

umgestellt $IN = \Phi \frac{l}{\mu A} \Rightarrow \Theta = \Phi \frac{l}{\mu A}$

Der Term $\frac{l}{\mu A}$ wird als magnetischer Widerstand bezeichnet:

Magnetischer Widerstand

$$R_m = \frac{l}{\mu A} \quad (6.11)$$

Daraus folgt:

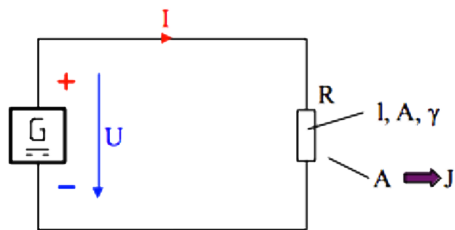
Ohmsches Gesetz des Magnetismus

$$\Theta = \Phi \cdot R_m \quad (6.12)$$

Dieser Zusammenhang wird als das ohmsche Gesetz des magnetischen Kreises bezeichnet.

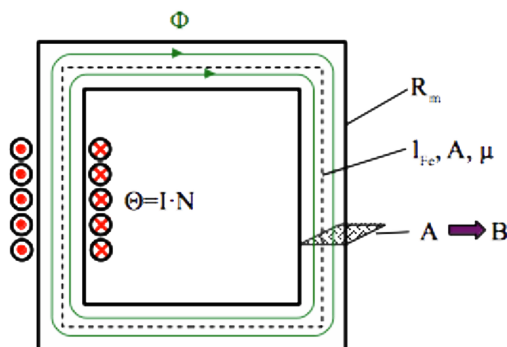
Vergleiche: $U = I \cdot R \quad (6.13)$

Elektrischer Stromkreis



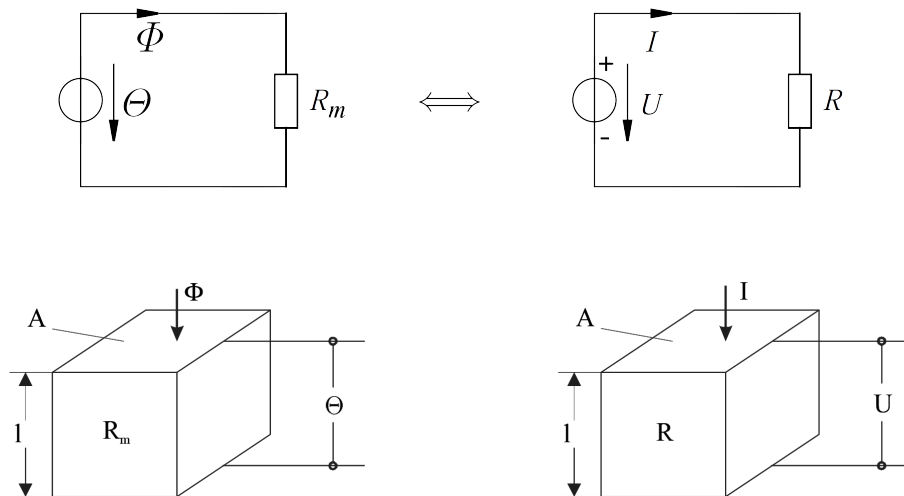
U Spannung
I Stromstärke
R Ohmscher Widerstand
l Leiterlänge
A Leiterquerschnitt
γ Elektrische Leitfähigkeit
J Stromdichte

Magnetkreis



Θ Durchflutung
Φ Magnetischer Fluss
R_m Magnetischer Widerstand
l_Fe Eisenweglänge
A Querschnittsfläche
μ Permeabilität
B Magnetische Flussdichte

Analogie: Magnetfeld elektrisches Strömungsfeld



magnetischer Kreis

Stromkreis

magnetischer
Fluß

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_M}$$

elektrischer
Strom

$$I = \frac{U}{R}$$

magnetische
Spannung

$$\Theta = \int_0^\ell H ds = H \cdot \ell$$

elektrische
Spannung

$$U = \int_0^\ell E ds = E \cdot \ell$$

magnetische Feldstärke

elektrische Feldstärke

magnetischer
Widerstand

$$R_m = \frac{\Theta}{\Phi} = \frac{H \cdot \ell}{\Phi}$$

elektrischer
Widerstand

$$R = \frac{U}{I} = \frac{E \cdot \ell}{I}$$

$$R_m = \frac{H \cdot \ell}{B \cdot A}$$

$$R = \frac{E \cdot \ell}{J \cdot A}$$

$$R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\ell}{A}$$

$$R = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\ell}{A}$$

mag. Leitfähigkeit
(Permeabilität) $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r = \frac{B}{H}$ elektrische
Leitfähigkeit $\kappa = \frac{J}{E}$

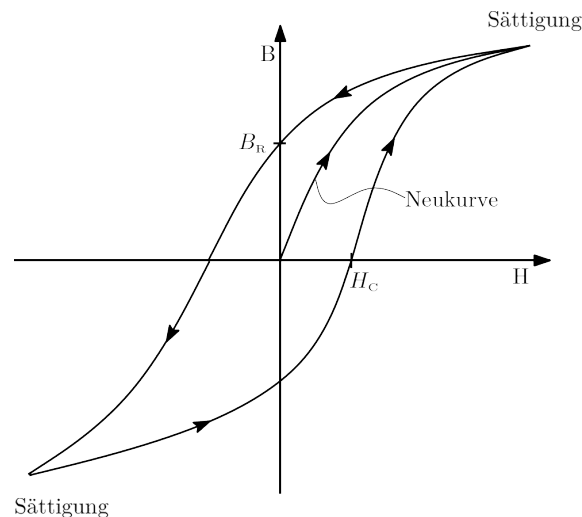
mit Stromdichte J

Feld	Ursache	Wirkung	Verbindende Größen		
Elektrisches Strömungsfeld	Quellenspannung U_q	Strom I	Widerstand R	Leitwert G	Spezifische Leitfähigkeit σ, γ, κ
Magnetisches Feld	Durchflutung (mag. Erregung) $U_m = \Theta = I N$	magnetischer Fluß Φ	magnetischer Widerstand R_m	magnetischer Leitwert Λ	Permeabilität μ

6.3.1 Magnetische Hysterese

Hysterese beschreibt allgemein ein Systemverhalten, bei dem die Ausgangsgröße neben den äußerlich einwirkenden Parametern des Systems auch von seinem vorherigen Zustand abhängig ist. Das System kann folglich bei identischen äußeren Zuständen je nach vorhergehendem Zustand unterschiedliche Werte einnehmen.

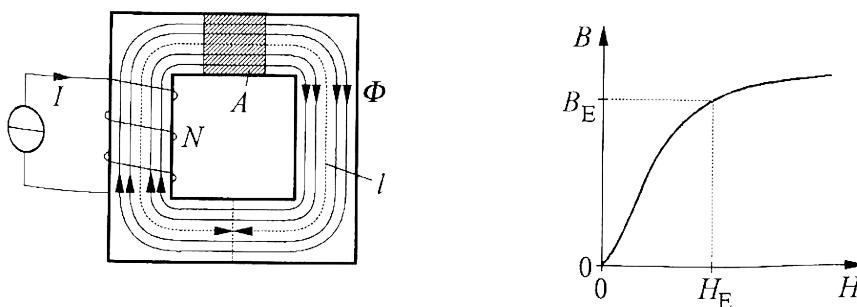
Beschrieben wird die magnetische Hysterese durch die Hysteresekurve:



Legt man z. B. an eine Transformatorspule erstmalig eine Spannung an, so magnetisiert sich der Eisenkern. Die Ausrichtung der Elementarmagnete folgt einer nichtlinearen Funktion mit Sättigung (Neukurve).

Verringert man den Strom und damit die Feldstärke auf 0 und polt ihn anschließend um, durchläuft die Kurve die Remanenz (Remanenzflussdichte B_r bei $H = 0$) und die Koerzitivfeldstärke H_c bei $B = 0$ bis zur Sättigung. Bei anschließender Umpolung verläuft die Kurve punktsymmetrisch zur bereits beschriebenen Magnetisierung.

Beispiel 1: Magnetischer Kreis mit Eisen



Flussdichte B_E an allen Stellen: $B_E = \frac{\Phi}{A}$ (meist bekannt)

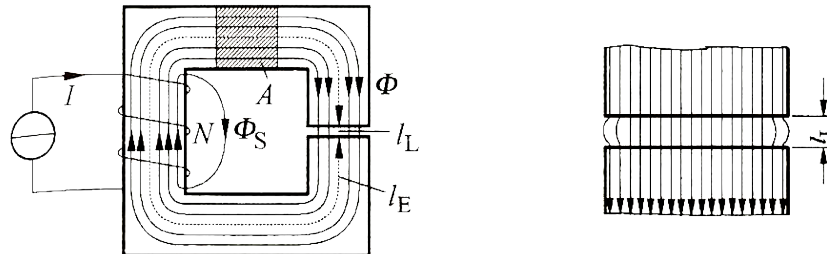
und $H_E = \frac{B_E}{\mu_0 \mu_r}$ (ablesen im Diagramm)

mit Durchflutungsgesetz: $H_E l = IN$

liefert: $I = \frac{H_E l}{N}$

Beispiel 2: Magnetischer Kreis mit Eisen und Luftspalt

Ein Luftspalt im ansonsten geschlossenen Verlauf eines Eisenkernpaketes oder Ferritkernes vergrößert den magnetischen Widerstand im magnetischen Kreis. Die magnetische Sättigung des Kernwerkstoffes tritt dadurch erst bei wesentlich höheren Feldstärken ein.



Der magnetische Fluss Φ ist an allen Stellen gleich groß:

bzw.
$$\Phi = B_E A = B_L A$$

$$H_L = \frac{B_L}{\mu_0}$$

mit dem Durchflutungsgesetz:

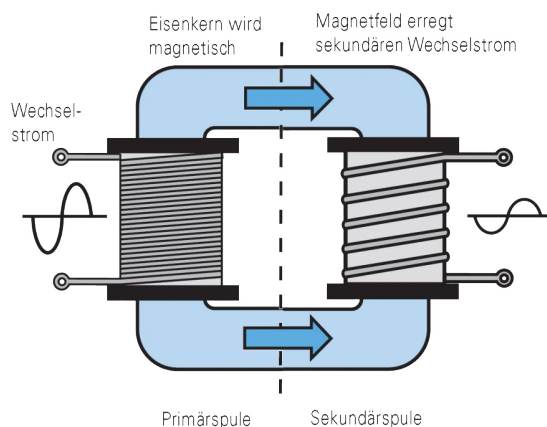
$$H_E l_E + H_L l_L = IN$$

Bei Gleichstrom-Relais z.B. vermeidet ein Luftspalt das Haftenbleiben des Magnetankers am Spulenkern, da auch bei stromloser Spule eine geringe Restmagnetisierung erhalten bleibt. Er wird hier mit einem nicht ferromagnetischen Niet oder einer Folie ausgefüllt.

6.3.2 Anwendungen

Magnetische Kreise mit Eisen $\Rightarrow$ Transformatoren

Luftspalt ermöglicht höhere Ströme

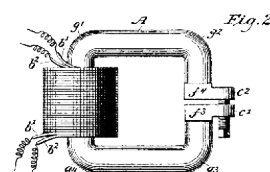
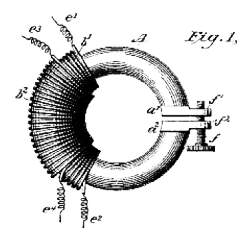


(No Model.)

W. STANLEY, Jr.
INDUCTION COIL.

No. 349,611.

Patented Sept. 21, 1886.



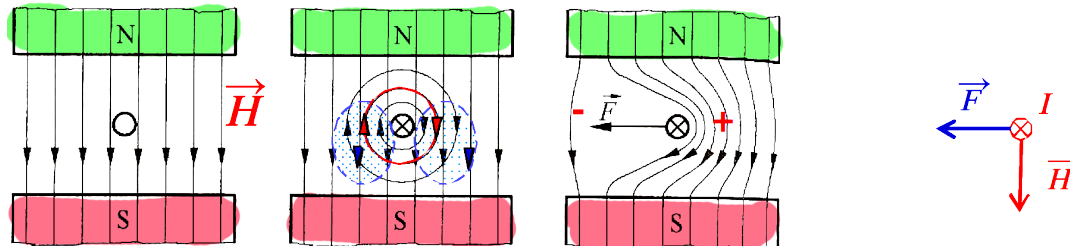
Siehe hierzu auch Kapitel 7 $\rightarrow$ Wechselstromtechnik.

6.4 Kräfte im magnetischen Feld

6.4.1 Stromführende Leiter im Feld

Die Richtung der Kraft:

Stromdurchflossener Leiter Magnetfeld, mit Richtung $N \rightarrow S$:



Es bilden sich Bereiche wo Feldlinien geschwächt und verstärkt werden.

Der Leiter wird abgelenkt.

Die **Kraftrichtung** erfolgt von der Feldlinienkonzentration zum Feldlinienmangel.

Mit der Kraft:
$$F = BIl \quad (6.14)$$

Mit Magnetfeld B , Strom I und der Länge des Leiters l .

Besteht zwischen l und B kein rechter Winkel gilt allgemein:

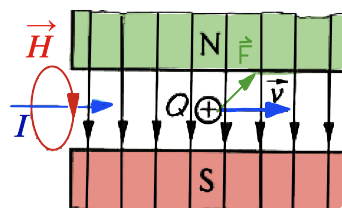
$$F = BI \sin(\alpha) \quad (6.15)$$

bzw.
$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}) \quad (6.16)$$

6.4.2 Bewegte Ladung im Magnetfeld

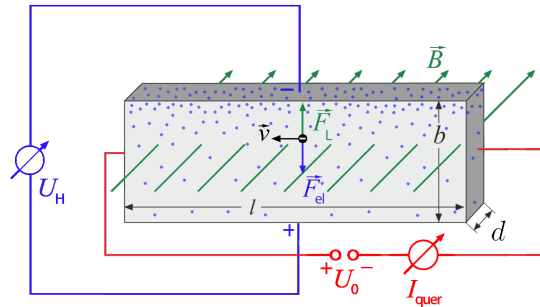
Fließender Strom ist bewegte Ladung

Bewegung in Richtung $\vec{v}$ bewirkt ein Magnetfeld, das den Ladungsträger in die Zeichenebene hinein drückt.



Die Kraft wird bekanntlich Lorentzkraft genannt:

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.17)$$

Beispiel: Hallsensor

Aufgrund der äußeren Spannung U_0 fließt durch einen Halbleiter oder ein Metall der Strom I_{quer} . Negative Ladungsträger bewegen sich mit dem Geschwindigkeitsbetrag v in die skizzierte Richtung und erfahren aufgrund des in die Zeichnungsebene gerichteten homogenen Magnetfeldes der Flussdichte $\vec{B}$ eine nach oben gerichtete LORENTZ-Kraft $\vec{F}_L$.

Dadurch kommt es im oberen Teil des Halbleiters zu einer stärkeren Konzentration negativer Ladungsträger als im unteren Teil. Die Folge ist eine Spannung U_H die man oben und unten abgreifen kann.

Aufgrund der vertikalen Ladungstrennung tritt auch eine elektrische Kraft $\vec{F}_{el}$ auf, die der LORENTZ-Kraft entgegen gerichtet ist. Im stationären Fall bzw. im Kräftegleichgewicht gilt mit $\vec{v} \perp \vec{B}$:

$$F_{el} = F_L$$

$$q \cdot E = q \cdot v \cdot B$$

mit $E = \frac{U_H}{b}$ folgt:

$$q \cdot \frac{U_H}{b} = q \cdot v \cdot B$$

$$U_H = v \cdot B \cdot b$$

Mit der materialabhängigen Hallkonstanten $R_H \left[\frac{\text{m}^3}{\text{C}}\right]$ und I_{quer} ergibt sich dann für U_H :

$$U_H = \frac{R_H \cdot I_{\text{quer}} \cdot B}{d}$$

Ist der Querstrom I_{quer} konstant, so kann man aus der letzten Beziehung folgern: $U_H \sim B$.

Die einfach messbare HALL-Spannung ist also proportional zur magnetischen Flussdichte. Somit eignen sich HALL-Sonden als eine relativ bequeme Möglichkeit zur Ausmessung von Magnetfeldern.



Raddrehzahlsensor

6.4.3 Kräfte zwischen parallelen Leitern

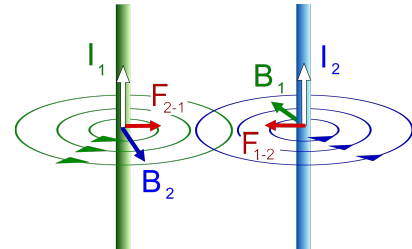
Stromführende Leiter üben gegenseitige Kräfte aus.

Wenn die Leiter gerade, parallel verlaufen, gilt für I_1 (I_2 zunächst 0):

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r}$$

Für die Flussdichte B :

$$B_1 = \mu H_1 = \frac{\mu I_1}{2\pi r}$$



Dies bewirkt im Punkt 2 eine Flußdichte B_1 .

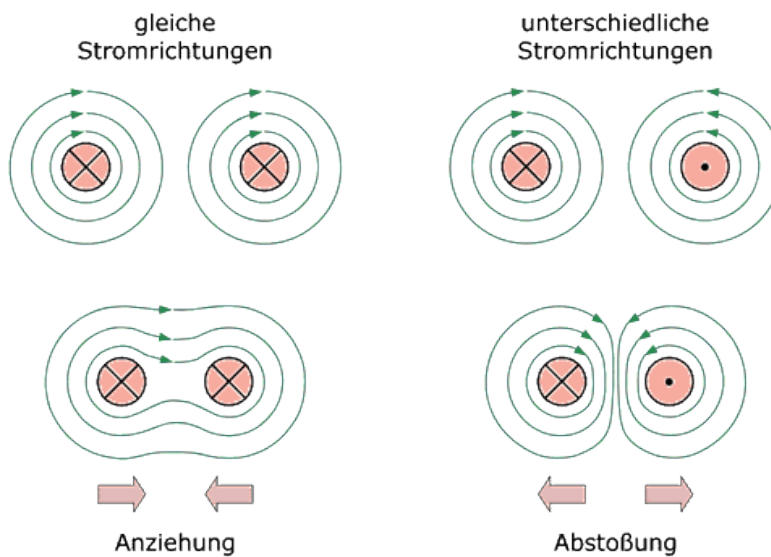
Nun soll Strom I_2 fließen. Dieser befindet sich in Magnetfeld der Flußdichte B_1 und bewirkt eine Kraft auf Leiter 2:

$$F = B_1 I_2 l$$

eingesetzt:

$$F = \frac{\mu I_1 I_2 l}{2\pi r}$$

Jeder Leiter übt die Kraft F auf den anderen Leiter aus. Bei gleichgerichteten Strömen ziehen sich die Leiter an.



6.5 Induktion

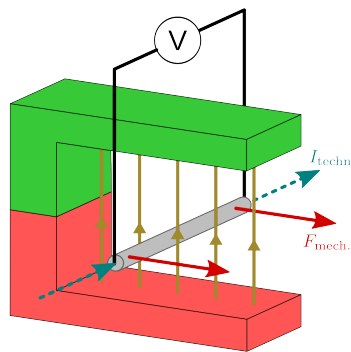
Unter elektromagnetischer Induktion (auch Faradaysche Induktion, nach Michael Faraday, kurz Induktion) versteht man das Entstehen eines elektrischen Feldes bei einer Änderung der magnetischen Flussdichte.

Zwei Möglichkeiten können auftreten (auch parallel):

1. Ein Leiter wird in einem Magnetfeld bewegt (d.h. Leiter und Magnetfeld bewegen sich relativ zueinander).
2. Der von einer Leiterschleife umfasste magnetische Fluss wird bei ruhendem Leiter und ruhendem Magnetfeld verändert.

1. Induktionswirkung durch Bewegen des Leiters:

Ein Leiter der Länge l , wird durch ein Magnetfeld mit der Flussdichte B , mit der Geschwindigkeit v bewegt.



Auf eine Ladung Q im Leiter ergibt sich die *Lorentzkraft*: $\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$

Ebenso die Kraft (*Coulomb-Kraft*) durch die Feldstärke: $\vec{F} = Q\vec{E}$

Gleichsetzen: $\vec{E} = \vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$

E_i ist die durch das Magnetfeld induzierte Feldstärke.

Durch Ladungstrennung ergibt sich die Feldstärke E mit der Kraft F auf die Ladungsträger.

Am Leitungsende liegt mit $E = vB$ und $U = E_l$

Induzierte Spannung

$$U = Blv = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = - \int_1^2 (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} \quad (6.18)$$

Das Minuszeichen signalisiert lediglich, dass die Wirkung der induzierten Spannung gegen das verursachende Magnetfeld zeigt (Lenzsche Regel).

2. Induktionswirkung des zeitlich veränderlichen Magnetfeldes:

Erzeugung einer Spannung ohne Bewegung des Leiters, durch Veränderung des magnetischen Flusses durch Leiterschleife.

In beiden Fällen spricht man von Induktion.

Es gilt: $U = -Blv$

Beim Zurücklegen eines Weges ist $U = -Bl \frac{ds}{dt}$

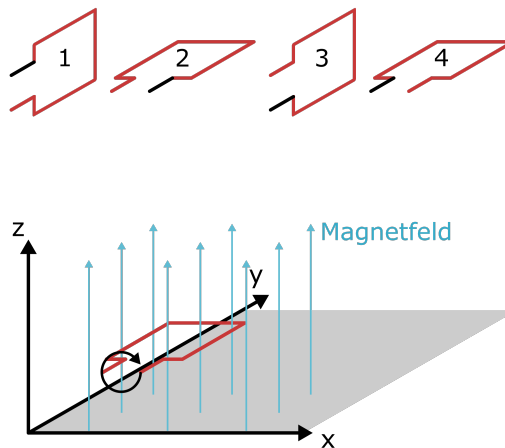
Wobei gilt: $Bl ds = -d\Phi$ und für damit zu:

Induktionsgesetz

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (6.19)$$

Das Induktionsgesetz besagt:

Die in einer Leiterschleife induzierte Spannung ist gleich der pro Zeiteinheit auftretenden Änderung des magnetischen Flusses, der von der Schleife umfasst wird.



Ersetzt man eine Schleife durch eine Spule mit der Windungszahl N (Φ wird N -mal umfasst) so gilt:

$$U = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (6.20)$$

6.6 Selbstinduktion

Nach dem Induktionsgesetz wird in jeder Spule, die von einem Magnetfeld veränderlicher Stärke umschlossen wird, eine Spannung induziert. Schaltet man den durch eine Spule fließenden Gleichstrom aus, dann bricht das Magnetfeld der Spule zusammen, verändert also seine Stärke und induziert deshalb in der Spule selbst eine Spannung. Diesen Vorgang bezeichnet man als Selbstinduktion.

Die induzierte Spannung ist zur Induktivität der Spule direkt proportional. Nach dem Induktionsgesetz ist die induzierte Spannung umso größer, je schneller sich die Stromstärke ändert. Unter der Bedingung einer gleichmäßigen zeitlichen Änderung der Stromstärke i (zeitlich veränderliche Größen: Kleinschreibung) gilt deshalb:

$$u_i \sim \frac{di}{dt}$$

Die Änderung des eingespeisten Stromes $i \rightarrow$ Änderung von Fluss Φ führt auf die Selbstinduktionsspannung.

Aus Gleichung: $u = -N \frac{d\Phi}{dt}$.

Strom i und Fluss Φ sind proportional und es gilt:

Selbstinduktion

$$U = -L \frac{di}{dt} \quad (6.21)$$

Die Konstante L wird als Selbstinduktivität (kurz) Induktivität bezeichnet.

Mit der Einheit: $[L] = \frac{\text{VS}}{\text{A}} = \text{Henry} = \text{H}$

Die Induktivität ist ein elektrisches Bauelement, also keine reine Rechengröße.
Bezeichnung: Induktivität oder Spule

Die Berechnung der Induktivität:

Mit $L = N \frac{d\Phi}{di} = N \frac{\Phi}{i}$

mit: $iN = \Phi \frac{l}{\mu A}$ wird:

$$L = N^2 \frac{\mu A}{l} \quad (6.22)$$

Oder mit dem magnetischen Widerstand R_m ausgedrückt

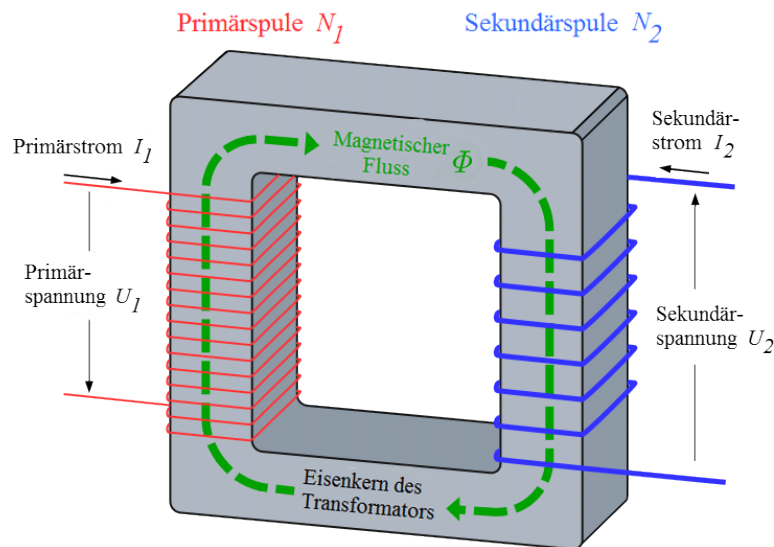
$$L = N^2 \frac{1}{R_m} \quad (6.23)$$

Spulen mit Eisenkern haben bei gleicher Baugröße eine um Zehnerpotenzen höhere Induktivität als eisenlose Spulen.

6.7 Transformator

Ein Transformator (von lateinisch transformare 'umformen, umwandeln'; kurz Trafo) besteht meist aus zwei oder mehr Spulen (Wicklungen), die in der Regel aus Kupferdraht gewickelt sind und sich auf einem gemeinsamen Ferrit- bzw. Eisenkern befinden.

Ein Transformator wandelt eine Eingangswechselspannung, die an einer der Spulen angelegt ist, in eine Ausgangswechselspannung um, die an der anderen Spule abgegriffen werden kann. Dabei entspricht das Verhältnis von Eingangs- und Ausgangsspannung dem Verhältnis der Windungszahlen der beiden Spulen.



- bei idealem Transformator
(keine ohmschen Widerstände, keine
Wirbelströme) ist auf der Primärseite (mit $\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt}$)

$$U_1 = -U_{Ind,1} = N_1 \cdot \dot{\Phi}_1$$

- Induktionsspannung über der Sekundärwicklung:

$$U_2 = U_{Ind,2} = -N_2 \cdot \dot{\Phi}_1$$

- da Eisenkern geschlossen, ist: $\Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow \dot{\Phi}_1 = \dot{\Phi}_2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{U_1}{U_2} = \pm \frac{N_1}{N_2}}$$

Je nach Auslegung des Transformators kann die Ausgangsspannung somit kleiner, größer oder gleich der Eingangsspannung sein. Der Wicklungssinn bestimmt das Vorzeichen der Ausgangsspannung (gleichsinnige Wicklungen $\rightarrow$ negatives Vorzeichen).

Transformatoren dienen vielfach zur Spannungswandlung in Energieversorgungsanlagen und in technischen Geräten, dabei insbesondere in Netzteilen zur Bereitstellung von Kleinspannungen in vielen Arten von elektrischen und elektronischen Geräten. Weiterhin werden sie bei der Signalübertragung und der Schutztrennung benötigt.

Beispiel:

Bei einem Windungsverhältnis von 20 zu 1 wird eine Eingangsspannung von 240 Volt in eine Ausgangsspannung von 12 Volt transformiert.

6.8 Energie des magnetischen Feldes

Die Energie ist im magnetischen Feld gespeichert. Es gilt (Kleinbuchstaben i, u für zeitlich veränderliche Größen):

$$dW = u i dt$$

mit $u = N A \frac{dB}{dt}$ und $i = \frac{H l}{N}$ bzw. $H = \frac{B}{\mu}$ und $V = A l$

Es ergibt sich die auf das Volumen V bezogene Energiedichte w :

Energiedichte

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}HB \quad (6.24)$$

Bei bekannter Induktivität L ist $u = L \frac{di}{dt}$.

Es wird

$$W = L \int_0^I i dt = L \left[\frac{i^2}{2} \right]_0^I = \frac{1}{2} L I^2$$

Energie

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \quad (6.25)$$

Bei Eisenkernspulen gilt dies nur für den Fall, dass das Eisen nicht gesättigt ist, und μ annähernd konstant ist

6.9 Anwendungen

Motor

Induktion; Einspeisung $\rightarrow$ Änderung des Magnetfeldes

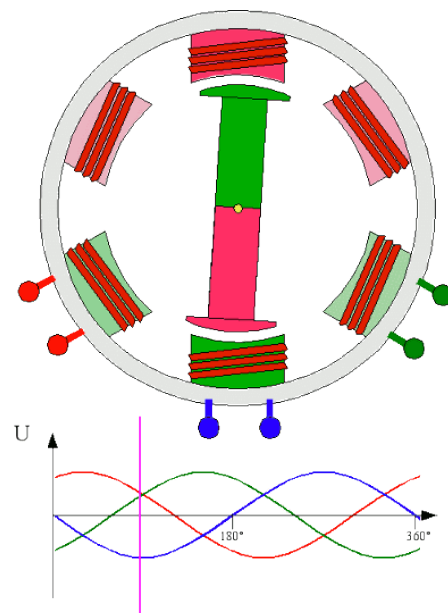
Beispiel: Synchronmotor

Mit den drei Phasen des Drehstromes können z.B. Elektromotoren betrieben werden. Dazu wird jede Phase mit einem Spulenpaar (oder einer einzelnen Spule) verbunden, wodurch in jeder Spule ein sich in der Stärke und Polarität änderndes magnetisches Feld erzeugt wird.

Durch den Wechsel der Magnetfelder wird ein magnetisches Drehfeld erzeugt. In diesem "wandern" die magnetischen Pole um die Motorachse herum. Der elektrisch oder permanent-terregte Rotor wird von diesem rotierenden Magnetfeld mitgezogen.

Die Drehung erfolgt synchron zu der Drehgeschwindigkeit des Magnetfeldes. Die Drehzahl des Motors ist damit durch die Frequenz des Drehstromes und die Anzahl der Pole von Stator und Rotor vorgegeben.

Wird ein Permanentmagnet als Rotor verwendet, benötigt ein derartiger Motor keine Schleifkontakte und arbeitet damit nahezu verschleißfrei. Solche Motoren werden als bürstenlos (englisch: brushless) bezeichnet.



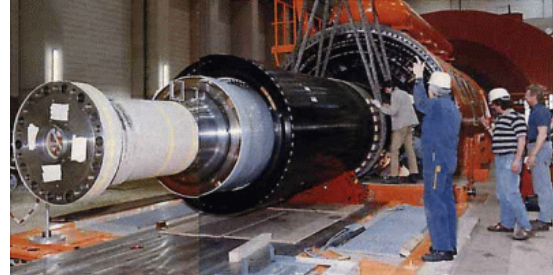
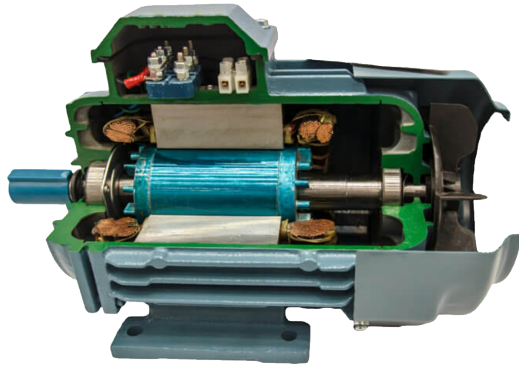
Beispiel: Tesla Model 3 Antriebseinheit



Generator

Induktion: Antrieb

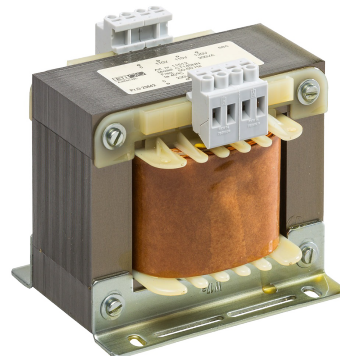
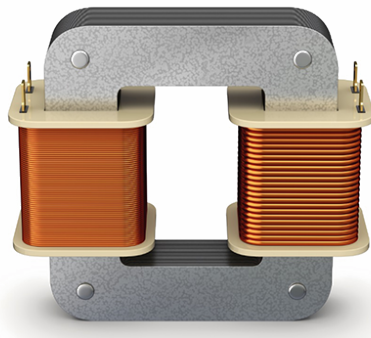
→ Änderung der durchfluteten Fläche



Transformator

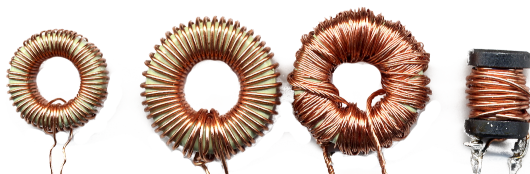
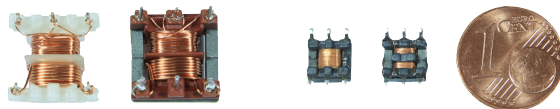
Selbstinduktion

→ Übertragung: Windung 1 nach 2



Spulen

Einsatz: NF, HF



KAPITEL 7

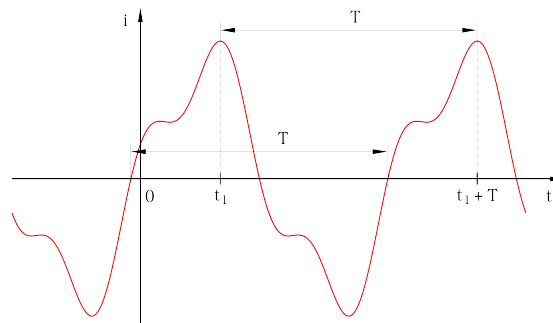
Wechselstromtechnik

7.1 Definition und Kenngrößen eines Wechselstroms

Wechselstrom ist die wichtigste Form des elektrischen Stromes. Heute werden etwa 99% der elektrischen Energie als Wechselstrom erzeugt, übertragen, verteilt und in andere Energieformen umgewandelt.

Bei Verwendung von Wechselstrom lässt sich elektrische Energie sehr einfach und verlustarm mit einem Transformator auf beliebige Spannungswerte wandeln.

Bei einem Wechselstrom ändern sich Größe und Richtung periodisch mit der Zeit t . Nach Ablauf der Periodendauer T wiederholt sich der Verlauf der zeitlichen Änderung.



Ein Strom ist also dann ein Wechselstrom, wenn er folgende zwei Bedingungen erfüllt:

- mit n als ganzer Zahl muss gelten:

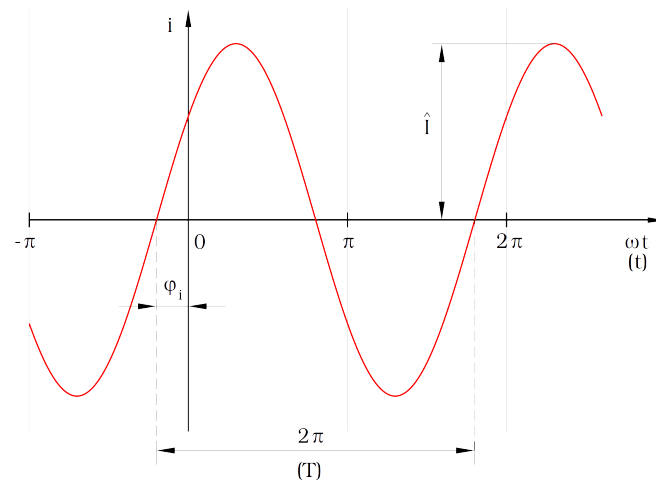
$$i(t) = i(t + nT) \quad (7.1)$$

- der arithmetische Mittelwert einer Wechselgröße, berechnet über eine Periode muss Null sein:

$$\hat{i} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = 0 \quad (7.2)$$

Sofern beide Bedingungen erfüllt sind, kann eine Wechselgröße innerhalb einer Periode einen beliebigen Verlauf zeigen.

Besonders in der elektrischen Energietechnik (Starkstromtechnik) strebt man eine reine Sinusfunktion für Ströme und Spannungen an, denn diese erfordert den geringsten Aufwand beim Bau von elektrischen Maschinen und Geräten.



mit:

i Augenblickswert

$\hat{I}$ Amplitude oder den Scheitelwert

ω Kreisfrequenz

f Frequenz

T Periodendauer

φ_i (Null-) Phasenwinkel

Es gilt:

$$f = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad (7.3)$$

Ein Wechselstrom ist durch drei Größen gekennzeichnet:

- Amplitude $\hat{I}$
- Frequenz f
- Phasenwinkel φ_i

Zwei Wechselströme sind nur dann gleich, wenn sie in Amplitude, Frequenz und Phasenwinkel übereinstimmen!

Vereinbarungsgemäß werden für die Augenblickswerte die entsprechenden Kleinbuchstaben, also u und i , verwendet. Die Großbuchstaben U und I bezeichnen in der Wechselstromtechnik die noch zu definierenden Effektivwerte von Spannung und Strom.

7.2 Effektivwert

Der Effektivwert, d.h. der 'wirksame Wert', ist die wichtigste Kenngröße eines Wechselstromes bzw. einer Wechselspannung. Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, werden sämtliche Spannungen und Ströme in der Wechselstromtechnik als Effektivwerte angegeben.

Wenn man z.B. sagt, die Netzwechselspannung hat den Wert 230 V, so bedeutet das, der Effektivwert der Netzwechselspannung beträgt 230 V.

Definition des Effektivwertes: Der Effektivwert eines Wechselstromes ist der Wechselstrom, der in einem ohmschen Widerstand die gleiche Stromwärme bewirkt, wie ein Gleichstrom mit demselben Betrag.

Davon ausgehend lässt sich ein Ausdruck für den Effektivwert des Wechselstromes ableiten: Ein zeitlich beliebig verlaufender Wechselstrom $i(t)$ verursacht in der Zeit in einem Ohmschen Widerstand die Stromwärme:

$$dW = p(t)dt = i^2(t)Rdt \quad (7.4)$$

Während der Dauer einer Periode entsteht die Stromwärme:

$$W = R \int_0^T i^2(t)dt \quad (7.5)$$

Ein Gleichstrom I erzeugt in der gleichen Zeit T die Stromwärme:

$$W = RI^2T \quad (7.6)$$

Durch Gleichsetzen gemäß Definition erhält man über

$$RI^2 = W = R \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)dt \quad (7.7)$$

die Definitionsgleichung des Effektivwertes:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)dt} \quad (7.8)$$

Analog gilt für den Effektivwert einer Wechselspannung:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t)dt} \quad (7.9)$$

Der Effektivwert wird wie eine Gleichgröße gekennzeichnet, d.h. in Großbuchstaben ohne besondere Kennzeichnung. Die Schreibweise I_{eff} ist unüblich.

Speziell für sinusförmigen Wechselstrom

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (7.10)$$

erhält man über

$$I^2 = \frac{1}{T} \hat{I}^2 \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi_i) dt = \frac{\hat{I}^2}{2} \int_0^T \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \varphi_i)] dt = \frac{\hat{I}^2}{2} \quad (7.11)$$

als Effektivwert

$$I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = 0.707 \hat{I} \quad (7.12)$$

Bei zeitlich sinusförmig verlaufenden Wechselgrößen ist der Effektivwert also um den Faktor $1/\sqrt{2}$ kleiner als der Scheitelwert (die Amplitude).

7.3 Verhalten von R, L, C bei Wechselstrom

Neben Spannungsquellen enthalten Wechselstromkreise Widerstände, Spulen und Kondensatoren.

Im Folgenden wird das Verhalten der drei Grundelemente Widerstand, Spule und Kondensator bei Wechselstrom untersucht. An diese drei Grundelemente wird die sinus-förmige Wechselspannung

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (7.13)$$

angelegt und der dann fließende Strom berechnet:

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (7.14)$$

Ermittelt werden die Amplitude des Wechselstromes und die sog. Phasenverschiebung, die Differenz der (Null-) Phasenwinkel von Spannung und Strom:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (7.15)$$

7.3.1 Widerstand

Bei einem Widerstand R gilt der Strom-Spannungs-Zusammenhang

$$u(t) = R i(t) \quad (7.16)$$

Beim Anlegen einer Wechselspannung gemäß Gl. (8) erhält man für den Augenblickswert des Stromes

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{\hat{U}}{R} \sin(\omega t + \varphi_u) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (7.17)$$

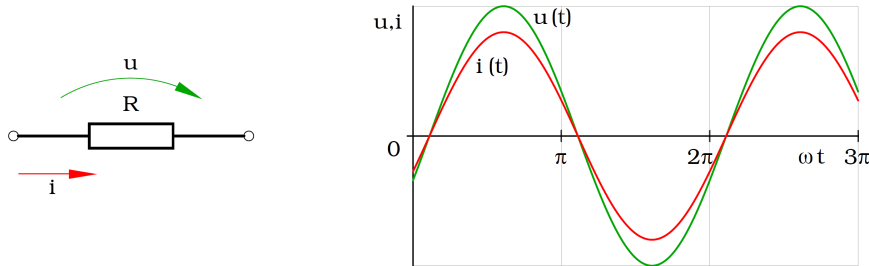
mit der Amplitude

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{R} \quad (7.18)$$

Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom ist Null.

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0 \quad (7.19)$$

Beim ohmschen Widerstand sind Spannung $u(t)$ und Strom $i(t)$ in Phase



7.3.2 Kondensator

Für einen Kondensator mit der Kapazität C lautet bekanntlich der Strom-Spannungs-Zusammenhang:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (7.20)$$

Beim Anlegen einer Wechselspannung gemäß Gl. (8) erhält man für den Augenblickswert des Stromes:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = \omega C \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (7.21)$$

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (7.22)$$

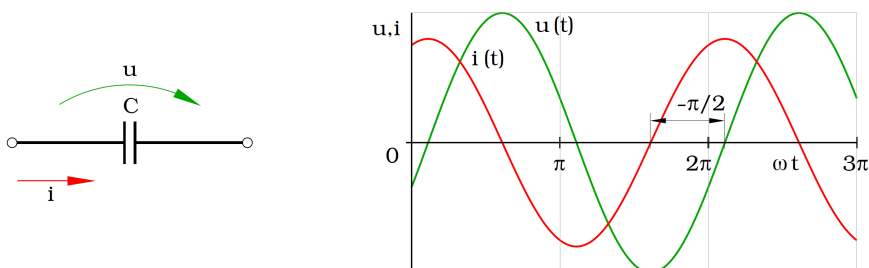
mit der Amplitude

$$\hat{I} = \omega C \hat{U} \quad (7.23)$$

und der Phasenverschiebung

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} \quad (7.24)$$

Beim Kondensator eilt die Spannung $u(t)$ dem Strom $i(t)$ um 90° nach



Man definiert: **Kapazitiver Blindwiderstand**

$$\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{\omega C} = X_C \quad (7.25)$$

Die Vorsilbe 'Blind' drückt aus, dass es sich um keine physikalisch reale Größe, sondern um eine reine Rechengröße mit der Dimension eines Widerstandes handelt.

7.3.3 Spule

Bei einer Spule mit der Induktivität L gilt bekanntlich der Strom-Spannungs-Zusammenhang

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt \quad (7.26)$$

Beim Anlegen einer Wechselspannung gemäß Gl. (7.20) erhält man für den Augenblickswert des Stromes:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt = -\frac{\hat{U}}{\omega L} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (7.27)$$

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (7.28)$$

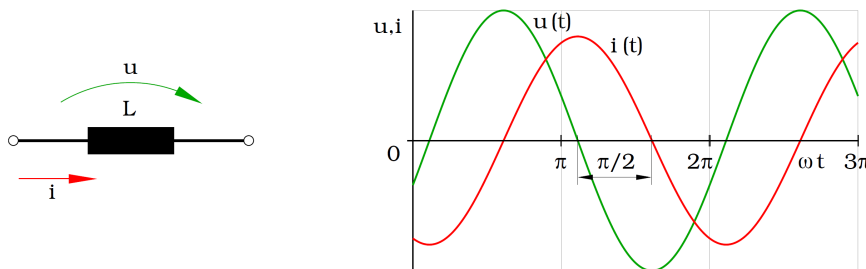
mit der Amplitude

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\omega L} \quad (7.29)$$

und der Phasenverschiebung

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = +\frac{\pi}{2} \quad (7.30)$$

Bei einer Spule eilt die Spannung $u(t)$ dem Strom $i(t)$ um 90° voraus



Man definiert: **Induktiver Blindwiderstand**

$$\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \omega L = X_L \quad (7.31)$$

Bei den Schaltelementen C und L bildet der Quotient $\frac{\hat{U}}{\hat{I}}$ das Verhältnis zweier Größen, die wegen der 90° -Phasenverschiebungen zu verschiedenen Zeitpunkten auftreten.

Merkregel: Bei Induktivitäten, Ströme sich verspäten

7.4 Zeigerdarstellung

Enthält ein Wechselstromkreis außer ohmschen Widerständen auch Spulen und/oder Kondensatoren, so führt die Berechnung der Ströme und Spannungen auf das Problem der Lösung von Differentialgleichungen. Ihre analytische Lösung erfordert gute Kenntnisse der Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen, ist umständlich und zeitraubend.

Verlaufen die Ströme und Spannungen in einem Stromkreis zeitlich rein sinusförmig, so können die Differentialgleichungen sehr effektiv mit Hilfe einer graphisch-analytischen Methode gelöst werden. Hierbei werden die Sinusfunktionen als Zeiger dargestellt.

Mit Hilfe weniger Konstruktionsregeln kann man für eine Schaltung das **Zeigerdiagramm** konstruieren, aus dem man mit Hilfe geometrischer Beziehungen die gesuchten Größen leicht berechnen kann.

Im Folgenden wird zunächst ein mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (7.32)$$

umlaufender Zeiger der Länge A betrachtet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat der Zeiger gegen die Bezugsachse den Winkel φ , zu einem beliebigen Zeitpunkt t den Winkel $\alpha = \omega t + \varphi$.

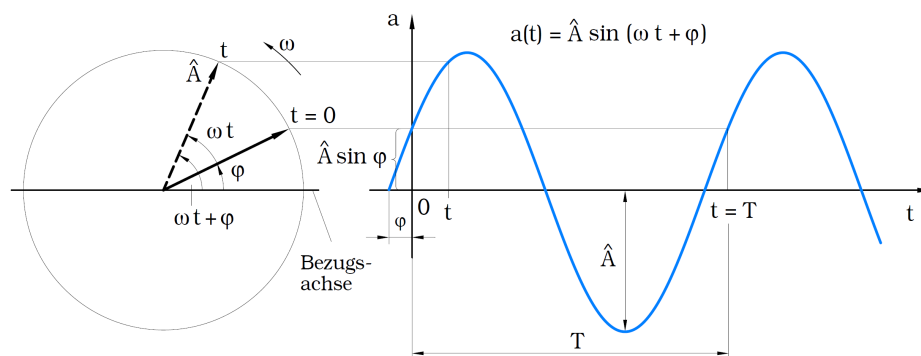


Bild 7.1: Zeigerdarstellung einer Sinusgröße

Die Projektionen des Zeigers auf die Bezugsachse bzw. deren Senkrechte haben die Längen $\hat{A}\cos(\omega t + \varphi)$ bzw. $\hat{A}\sin(\omega t + \varphi)$

Man kann also eine sich zeitlich sinusförmig ändernde Größe durch einen umlaufenden Zeiger darstellen. Die Länge des Zeigers entspricht der Amplitude der Sinusfunktion.

Der **umlaufende Zeiger** der Sinusfunktion wird mit $a(t) = \hat{A}\sin(\omega t + \varphi)$ wird mit $\underline{a}$ gekennzeichnet, z.B. $\underline{u}$, $\underline{i}$ usw.

Zwei Sinusfunktionen gleicher Frequenz, unterschiedlicher Amplitude und unterschiedlicher Phasenlage, z. B. $u(t)$ und $i(t)$ in einer Wechselstromschaltung, werden durch zwei Zeiger $\underline{u}$ und $\underline{i}$ abgebildet. Die Längen der Zeiger entsprechen den Amplituden der Sinusfunktionen.

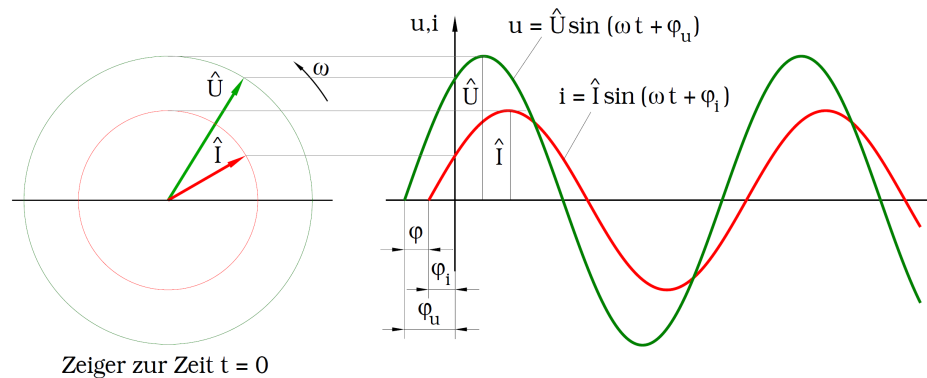


Bild 7.2: Zeigerdarstellung einer Sinusspannung und eines Sinusstromes

In linearen Wechselstromschaltungen haben alle Wechselspannungen und Wechselströme die gleiche Frequenz.

In Zeigerbildern, bei denen alle Zeiger Sinusfunktionen der gleichen Frequenz darstellen, kann der Umlauf weggelassen werden, denn für die relative Lage der Zeiger zueinander ist es gleichgültig, zu welchem Zeitpunkt man die 'Momentaufnahme' des Zeigerbildes macht.

Im Allgemeinen interessieren nur die Amplituden und die Phasenlage der Zeiger zueinander. Man geht zweckmäßig zu ruhenden Zeigern über, die nur noch durch ihre Amplitude und ihre Phasenlage gekennzeichnet sind. Ruhende Zeiger werden mit $\underline{A}$, $\underline{U}$, $\underline{I}$ usw. bezeichnet.

Die Vorteile der Zeigerdarstellung sind:

1. Bei der Addition/Subtraktion mehrerer Sinusfunktionen erhält man die resultierende Größe durch vektorielle Addition/Subtraktion der entsprechenden Zeiger.
2. Die Multiplikation einer Sinusfunktion mit einem skalaren Faktor

$$R \cdot i(t) = u(t)$$

drückt sich im Zeigerbild durch einen gleichphasigen Zeiger zum Zeiger der Sinusfunktion aus.

3. Die **Differentiation** einer Sinusfunktion drückt sich durch einen um 90° voreilenden Zeiger, die **Integration** durch einen um 90° nacheilenden Zeiger gegenüber dem Zeiger der Ausgangsfunktion aus.

Daraus ergeben sich drei Grundregeln für die Konstruktion von Zeigerbildern:

1. Am **ohmschen Widerstand** gilt:

$$u_R = R \cdot i$$

Die Zeiger des Stromes und der Spannung sind in Phase.

Für Amplitude und Effektivwert gilt:

$$\hat{U}_R = R\hat{I} \quad U_R = R \cdot I$$



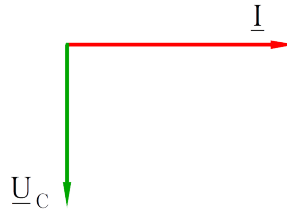
2. Am **Kondensator** gilt der Strom-Spannungszusammenhang

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad u_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

Der Stromzeiger eilt dem Zeiger der Spannung um 90° voraus.

Für Amplitude und Effektivwert gilt:

$$\hat{U}_C = \frac{1}{\omega C} \hat{I} = X_C \hat{I} \quad U_C = X_C I$$



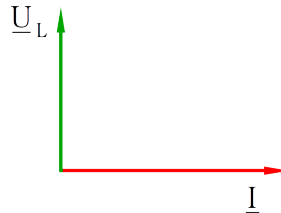
3. Für die **Induktivität** gilt der Strom-Spannungszusammenhang

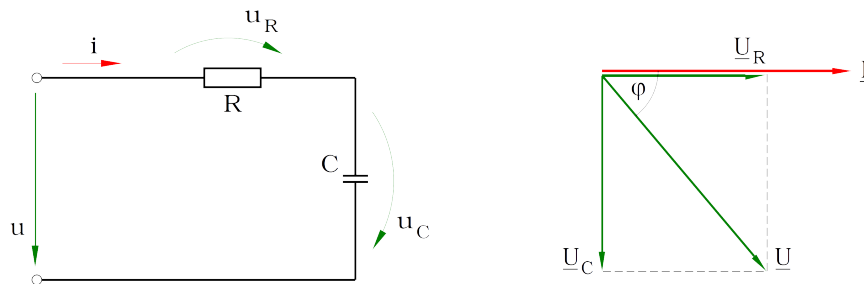
$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

Der Zeiger der Spannung eilt dem Stromzeiger um 90° voraus.

Für Amplitude und Effektivwert gilt:

$$\hat{U}_L = \omega L \hat{I} \quad U_L = X_L I$$



Beispiel 1: RC-Reihenschaltung**Bild 7.3:** Reihenschaltung von R und C: Schaltung und Zeigerbild

Gegeben: $u(t) = \hat{U} \sin(\omega t)$

Gesucht: $i(t)$

Bei einer Reihenschaltung fließt durch jedes Element der gleiche Strom $i(t)$.

Es treten drei Spannungsabfälle $u_R(t)$, $u_C(t)$ und $u(t)$ auf.

Der Maschensatz liefert:

$$u_R(t) + u_C(t) = u(t)$$

in Zeigerschreibweise:

$$\underline{U}_R + \underline{U}_C = \underline{U}$$

Das Zeigerbild muss den Stromzeiger $\underline{I}$ und die drei Spannungszeiger $\underline{U}_R$, $\underline{U}_C$ und $\underline{U}$ phasenrichtig anordnen.

1. Bei der Konstruktion des Zeigerbildes verwendet man den Stromzeiger $\underline{I}$, den Zeiger der beiden Elementen gemeinsamen Größe, als Bezugszeiger.
2. Am ohmschen Widerstand sind Strom und Spannungsabfall in Phase, folglich hat der Zeiger $\underline{U}_R$ die gleiche Richtung wie $\underline{I}$.
3. Am Kondensator eilt die Spannung dem Strom um 90° nach, folglich ist der Zeiger $\underline{U}_C$ gegenüber den Zeigern $\underline{I}$ und $\underline{U}_R$ um 90° nacheilend anzutragen.
4. Den Zeiger der Gesamtspannung $\underline{U}$ erhält man als vektorielle Summe der Teilspannungszeiger $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_C$.

Man erhält das in Bild 1 dargestellte Zeigerbild, in dem der Stromzeiger $\underline{I}$ dem Zeiger der gegebenen Gesamtspannung $\underline{U}$ um den Winkel φ voreilt.

Mit:

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t)$$

gilt also:

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi).$$

Aus dem Zeigerbild liest man ab:

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$$

und

$$\tan \varphi = \frac{U_C}{U_R}.$$

Mit

$$U_R = RI$$

$$U_C = X_C I = \frac{1}{\omega C} I$$

erhält man daraus:

$$U = I \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

und

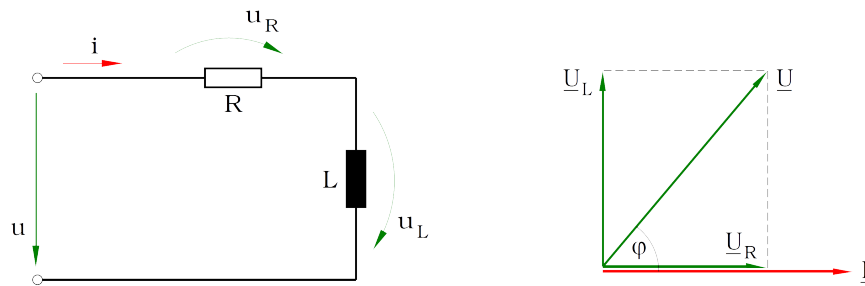
$$\tan \varphi = \frac{U_C}{U_R} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega CR}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right).$$

Bei der Schreibweise ist zu beachten, dass allgemein A den Betrag des Zeigers $\underline{A}$ bezeichnet:

$$A = |\underline{A}| \tag{7.33}$$

Dabei entspricht A dem Effektivwert von $a(t)$.

Beispiel 2: RL-Reihenschaltung**Bild 7.4:** Reihenschaltung von R und L: Schaltung und Zeigerbild

Gegeben: $u(t) = \hat{U} \sin(\omega t)$

Gesucht: $i(t)$

Die Konstruktion des Zeigerbildes erfolgt analog zum vorhergehenden Beispiel, wobei zu beachten ist, dass bei der Induktivität die Spannung dem Strom um 90° vorseilt.

Aus dem Zeigerbild liest man ab, dass jetzt der Strom $\underline{I}$ der Gesamtspannung $\underline{U}$ um den Winkel φ nacheilt. Es gilt also

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t - \varphi)$$

Aus

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{U_L}{U_R}$$

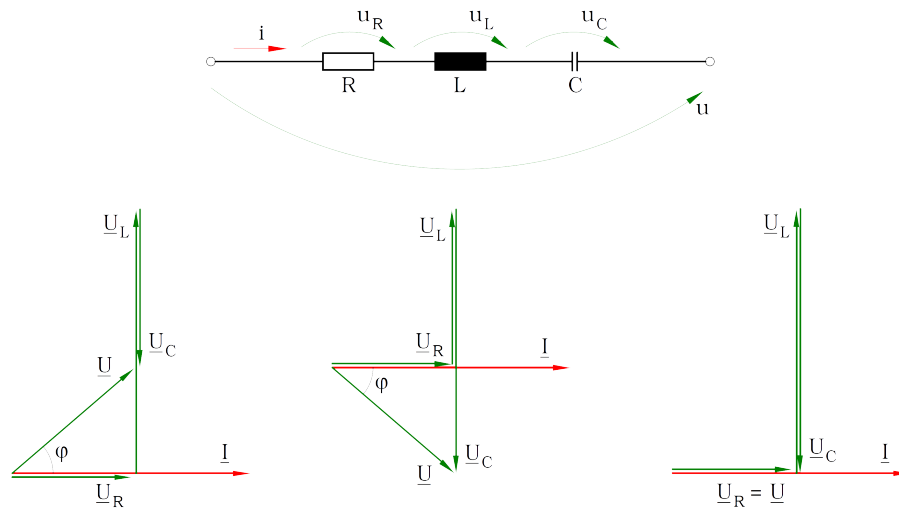
und

$$U_R = R \cdot I \qquad U_L = X_L I = \omega L I$$

erhält man

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Beispiel 3: RLC-Reihenschwingkreis**Bild 7.5:** Reihenschwingkreis: Schaltung und Zeigerbild

Gegeben: $u(t) = \hat{U} \sin(\omega t)$

Gesucht: $i(t) = \hat{I} \sin(\omega t - \varphi)$

Der Maschensatz ergibt:

$$\underline{U}_R = \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{U}$$

Außerdem gilt:

$$U_R = RI \quad U_L = \omega LI \quad U_C = \frac{1}{\omega C} I$$

Die Konstruktion des Zeigerbildes beginnt man zweckmäßig mit dem Strom $\underline{I}$, der allen drei Elementen gemeinsamen Größe. Aus den Zeigerbildern liest man ab:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Den Wurzelausdruck bezeichnet man als sog. **Scheinwiderstand**:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (7.34)$$

Bei der Konstruktion des Zeigerbildes sind drei Fälle zu unterscheiden:

- $\omega L > \frac{1}{\omega C}$: In diesem Fall eilt die Spannung $\underline{U}$ dem Strom $\underline{I}$ voraus, $\varphi > 0$. Der Schwingkreis zeigt ohmsch-induktives Verhalten.
- $\omega L < \frac{1}{\omega C}$: In diesem Fall eilt der Strom $\underline{I}$ der Spannung $\underline{U}$ voraus, $\varphi < 0$. Der Schwingkreis zeigt ohmsch-kapazitives Verhalten.

- $\omega L = \frac{1}{\omega C}$: In diesem Fall sind Strom $\underline{I}$ und Spannung $\underline{U}$ in Phase, $\varphi = 0$.
Der Schwingkreis verhält sich wie ein ohmscher Widerstand: $Z = R$.

Diesen Betriebszustand bezeichnet man als Resonanz. Bei gegebenen Werten von R, L und C lässt sich dieser Betriebszustand durch entsprechende Wahl der Frequenz einstellen.

Die Resonanzfrequenz f_0 erhält man aus

$$\begin{aligned}\omega_0 L &= \frac{1}{\omega_0 C} \\ f_0 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\end{aligned}\tag{7.35}$$

7.5 Komplexe Wechselstromrechnung

In komplexer Darstellungsweise, können die sich drehenden Zeiger bei sinusförmiger Versorgungsspannung folgendermaßen dargestellt werden:

Ohmscher Widerstand:

Spannung:

$$\underline{U} = U e^{j\omega t}\tag{7.36}$$

Strom

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{U}{R} e^{j\omega t}\tag{7.37}$$

Die rotierenden Zeiger haben zu jedem Zeitpunkt t die gleiche Richtung.

Kondensator:

Spannung:

$$\underline{U} = U e^{j\omega t}\tag{7.38}$$

Strom

$$\underline{I} = C \frac{d\underline{U}}{dt} = j\omega C U e^{j\omega t} = j\omega C \underline{U}\tag{7.39}$$

Der Strom eilt der Spannung um $\varphi = 90^\circ$ voraus.

Kondensator Blindwiderstand/Impedanz:

$$X_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}\tag{7.40}$$

Spule:

Strom

$$\underline{I} = I e^{j\omega t}\tag{7.41}$$

Spannung:

$$\underline{U} = L \frac{d\underline{I}}{dt} = j\omega L I e^{j\omega t} = j\omega L \underline{I}\tag{7.42}$$

Die Spannung eilt dem Strom um $\varphi = 90^\circ$ voraus.

Spule Blindwiderstand/Impedanz:

$$X_L = j\omega L \quad (7.43)$$

7.6 Leistung im Wechselstromkreis

Im Folgenden wird der in Bild 7.6 dargestellte Grundstromkreis, bestehend aus einem Wechselstromgenerator und einem beliebigen Verbraucher, betrachtet.

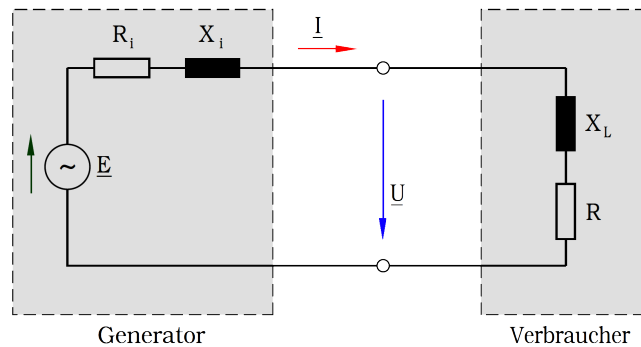


Bild 7.6: Grundstromkreis

Die Phasenverschiebung φ zwischen Spannung und Strom hängt von der Art des Verbrauchers ab. Sie kann positiv oder negativ sein.

Bei einem ohmsch-induktiven Verbraucher, der in der Praxis am häufigsten vorkommt, gilt:

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t) \quad (7.44)$$

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t - \varphi) \quad (7.45)$$

Der Augenblickswert der im Verbraucher umgesetzten Leistung ergibt sich aus dem Produkt der Augenblickswerte von Spannung und Strom:

$$p(t) = u(t)i(t) = \hat{U} \hat{I} \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) \quad (7.46)$$

Unter Berücksichtigung der Additionstheoreme für Sinusfunktionen

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (7.47)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (7.48)$$

und des Zusammenhanges zwischen den Scheitelwerten und den Effektivwerten

$$\hat{U} = \sqrt{2}U \quad \hat{I} = \sqrt{2}I \quad (7.49)$$

lässt sich der Augenblickswert der Leistung in folgende Form bringen:

$$p(t) = UI \cos \varphi (1 - \cos(2\omega t)) + UI \sin \varphi \sin(2\omega t) \quad (7.50)$$

$$p(t) = P(1 - \cos(2\omega t)) + Q \sin(2\omega t) = p_1(t) + p_2(t) \quad (7.51)$$

Darin sind

$$P = UI \cos \varphi \quad Q = UI \sin \varphi \quad (7.52)$$

Blindleistung kann nur auftreten, wenn der Verbraucher Spulen und/oder Kondensatoren, d.h. Energiespeicher, enthält.

$$S = U \cdot I \quad (7.53)$$

heißt Scheinleistung. Ihre Maßeinheit ist Voltampere:

$$[S] = 1 \text{ VA}$$

Das Verhältnis von Wirkleistung und Scheinleistung

$$\lambda = \cos \varphi = \frac{P}{S} \quad (7.54)$$

bezeichnet man Leistungsfaktor.

Er drückt die im Verbraucher umgesetzte Leistung an der maximal möglichen Leistung aus.

Zwischen Wirk-, Blind- und Scheinleistung besteht der Zusammenhang:

$$P^2 + Q^2 = S^2 \quad (7.55)$$

Die Blindleistungen von Spule und Kondensator lassen sich auch mit Hilfe der Blindwiderstände

$$X_L = \omega L \quad \text{bzw.} \quad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

ausdrücken.

$$Q_L = U_L I_L = \frac{U_L^2}{X_L} = I_L^2 X_L \quad (7.56)$$

$$Q_C = U_C I_C = \frac{U_C^2}{X_C} = I_C^2 X_C \quad (7.57)$$

Messung der Wirkleistung: Um die in einem Verbraucher umgesetzte Wirkleistung

$$P = \bar{p} = \int_0^T u(t) i(t) dt = UI \cos \varphi \quad (7.58)$$

zu bestimmen, muss ein Wirkleistungs-Messgerät den arithmetischen Mittelwert des Produktes der Augenblickswerte von Verbraucherspannung $u(t)$ und Verbraucherstrom $i(t)$ bilden.

KAPITEL 8

Bauelemente

8.1 Diode

Dioden sind passive Halbleiterbauelemente mit zwei Anschlüssen. Der eine Anschluß heißt Katode, der andere Anode. Die ideale Diode wirkt wie ein Schalter, dessen Stellung davon bestimmt wird, an welchem der beiden Anschlüsse das positivere und an welchem das negativere Potential anliegt:

- Liegt an der Katode eine negativere und an der Anode eine positivere Spannung an, so ist der Schalter geschlossen: die Diode ist leitend bzw. in Durchlaß- oder Flußrichtung geschaltet; es kommt ein Stromfluß zustande,
- Liegt an der Katode eine positivere und an der Anode eine negativere Spannung an, so ist der Schalter geöffnet: die Diode ist gesperrt bzw. in Sperrichtung geschaltet; es kann kein Strom fließen.

In Kurzform:

- Durchlaßrichtung (Forward Direction) = Minus an Katode, Plus an Anode.
- Sperrichtung (Reverse Direction) = Plus an Katode, Minus an Anode.

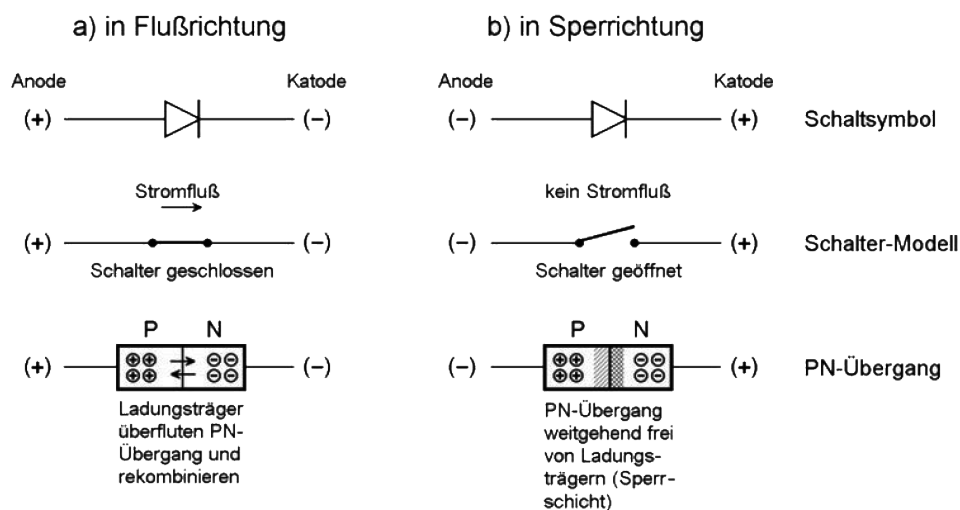


Bild 8.1: Die (idealisierte) Halbleiterdiode. Die Anode ist P-leitend, die Katode N-leitend.

Es können verschiedene physikalische Effekte und verschiedene Materialien genutzt werden, um derart wirkende Bauelemente zu schaffen. Die meisten modernen Dioden beruhen jedoch auf dem PN-Übergang (üblicherweise als Sperschicht bezeichnet) und auf Silizium als Basismaterial.

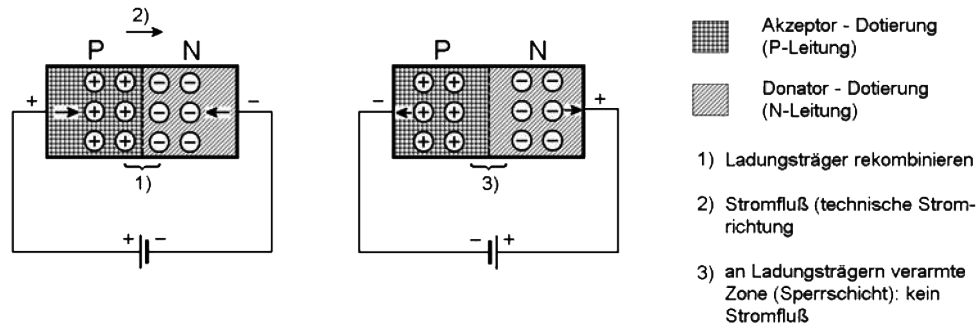


Bild 8.2: Der PN-Übergang. Links: Betrieb in Durchlaßrichtung, rechts: Betrieb in Sperrrichtung.

Die Diode in der Kennlinie:

Das einfache Schaltermodell ist für die Praxis zu ungenau. Um die wesentlichen Einzelheiten zu erkennen, müssen wir uns die Strom-Spannungs-Kennlinie der Diode ansehen.

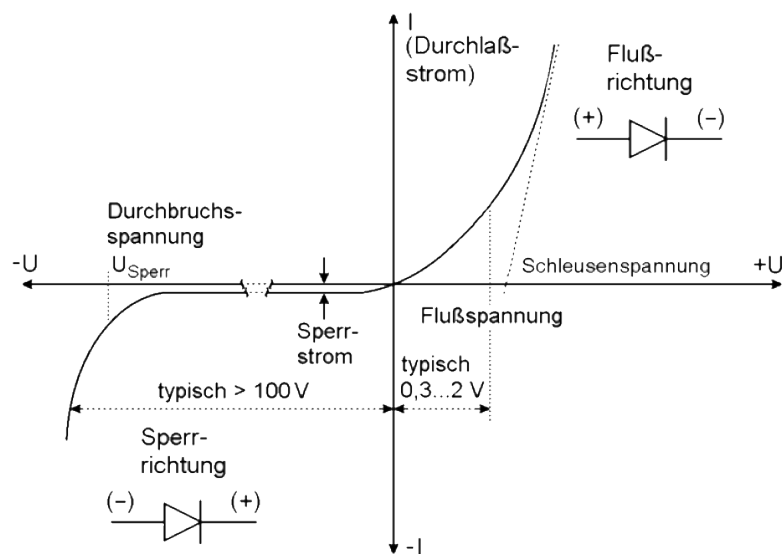


Bild 8.3: Diodenkennlinie.

8.2 Transistor

Transistoren sind Halbleiter-Bauteile, die als Schalter, Regler und Verstärker vielerlei Anwendung finden.

Ein Transistor (Kurzwort für 'transfer resistor') kann, je nach Schaltungsart, tatsächlich wie ein elektrisch regelbarer Widerstand eingesetzt werden.

Grundsätzlich ähnelt ein Transistor allerdings vielmehr einer Röhrentriode, weshalb er auch als 'Halbleiter-Triode' bezeichnet wird. Transistoren werden insbesondere verwendet, um Ströme zu schalten, zu verstärken oder zu steuern.

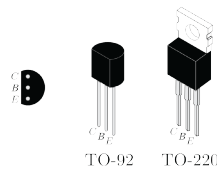


Bild 8.4: Diskrete Transistoren

In diskreten Schaltungen werden häufig so genannte 'bipolare' Transistoren eingesetzt.

Diese bestehen aus drei Halbleiterschichten, wobei je nach Reihenfolge der Dotierungen zwischen npn- und pnp-Transistoren unterschieden wird.

Die drei an den Halbleiterschichten angebrachten Anschlüsse eines bipolaren Transistors werden Kollektor C, Basis B und Emitter E genannt.

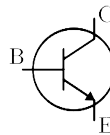
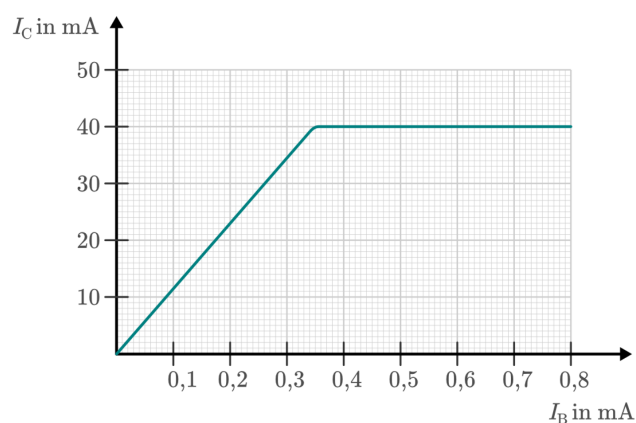


Bild 8.5: Transistor Schaltzeichen

Da Transistoren sehr hohe Schaltfrequenzen (rund 100 MHz - 100 GHz, teilweise sogar noch mehr) zulassen, können beispielsweise auch niedrig-frequente Spannungsimpulse eines Audio Eingangs (20 Hz bis 20 kHz) durch Anlegen an die Basis eines Transistors auf dem erheblich größeren Kollektor-Emitter-Strom abgebildet beziehungsweise verstärkt werden:

$$I_{CE} = B \cdot I_{BE} \quad (8.1)$$

Der Verstärkungsfaktor B eines einzelnen Transistors liegt, je nach Bauart, bei rund 100 bis 500; beispielsweise kann bei einem Transistor mit einem Verstärkungsfaktor von 300 ein Basis-Strom von 1 mA einen Kollektor-Emitter-Strom von maximal $300 \text{ mA} = 0,3 \text{ A}$ steuern.

Bild 8.6: Beispiel einer $I_C(I_B)$ -Kennlinie eines Transistors (stark vereinfacht)

Ist der durch die Basis fließende Strom groß genug, so ist der Transistor 'in Sättigung' - zwischen Kollektor und Emitter fließt entsprechend der maximal mögliche (durch die restliche Schaltung vorgegebene) Strom; eine Verstärkung des Basis-Stroms führt zu keiner weiteren Erhöhung des Kollektor-Emitter-Stroms.

Der Transistor wirkt bei Anlegen derartiger Basis-Spannungen vielmehr wie ein Schalter.

8.3 Operationsverstärker

Der Operationsverstärker ist ein Verstärkerelement, das erst durch eine äußere Beschaltung zu einem sinnvoll einsetzbaren elektronischen Bauteil wird und das vorgegebene Operationen mit Spannungssignalen durchführt. Solche Operationen (daher hat der OP seinen Namen) können z. B. sein: Verstärkung, Addition, Integration, Differentiation usw.

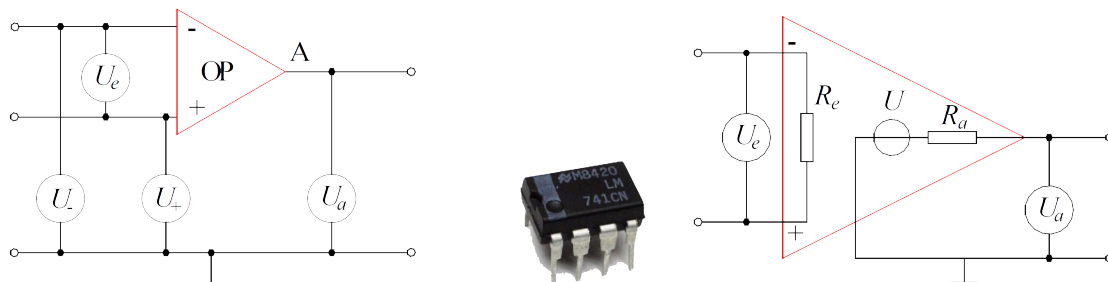


Bild 8.7: Links: Schaltsymbol eines OP (rot) und Definition von Spannungen. U_e , U_+ und U_a werden auf das Massepotential bezogen.

Mitte: Foto eines OP vom Typ 741 mit $2 \times 4 = 8$ Anschlusskontakten.

Rechts: Ersatzschaltbild eines OP zur Definition des Eingangswiderstandes R_e und des Ausgangswiderstandes R_a . R_e liegt zwischen dem 'Plus'- und dem 'Minus'-Eingang. Den Ausgang des OP kann man als eine spannungsgesteuerte Spannungsquelle U mit dem Innenwiderstand R_a betrachten.

8.4 Sensoren

8.4.1 E-Feld Näherungssensor

- Kann beliebige Körper erkennen
- Annäherung bewirkt Kapazitätserhöhung $\Rightarrow$ RC-Oszillator beginnt zu schwingen.
- $C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$
- Anwendung: Diebstahlschutz, Feuchtigkeitssensor

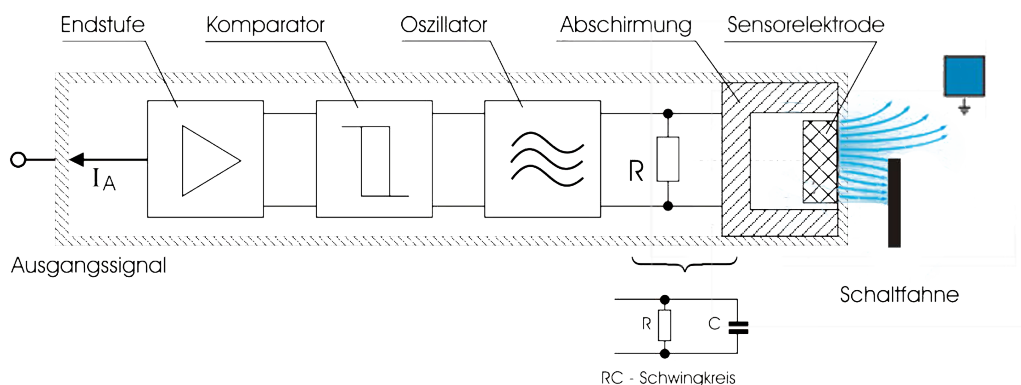


Bild 8.8: E-Feld-Näherungssensor

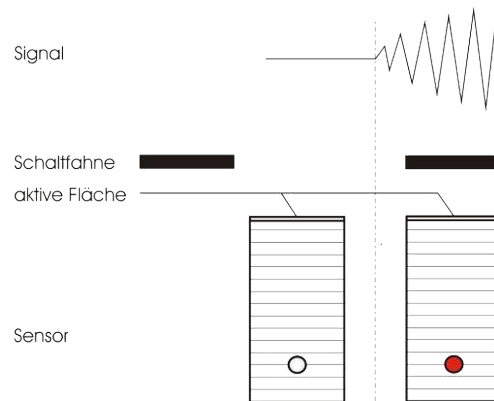


Bild 8.9: E-Feld-Näherungssensor, RC-Kreis fängt zu schwingen an

8.4.2 B-Feld Näherungssensor

- Kann nur metallische Gegenstände erkennen
- Hochfrequentes B-Feld $\Rightarrow$ Amplitudenänderung durch Metall
- $L = \mu_0 \mu_r N^2 \cdot \frac{A}{d}$
- Anwendung: Arbeitssicherheit

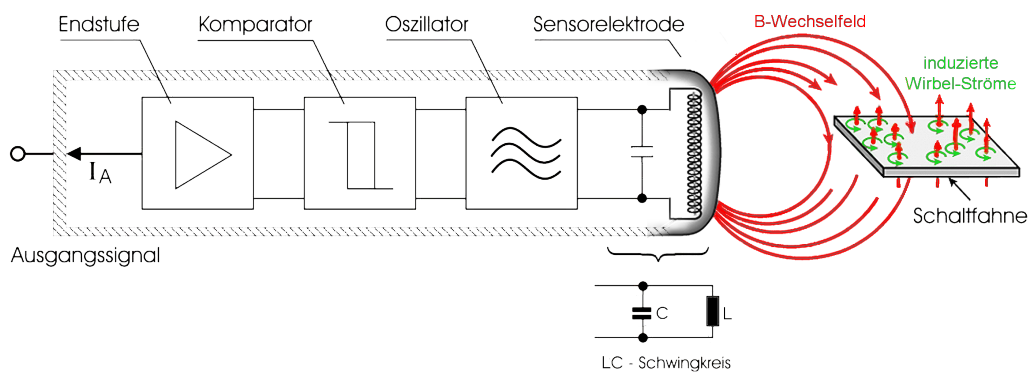


Bild 8.10: B-Feld-Näherungssensor, Funktionsprinzip

8.4.3 Brandmelder

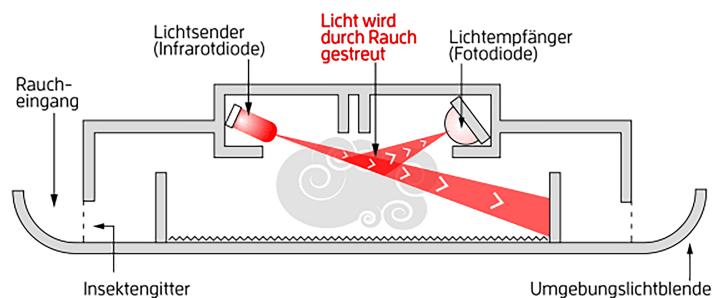


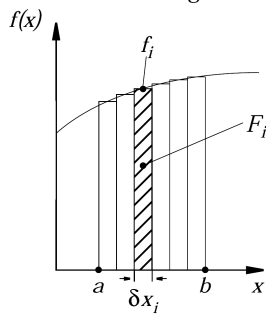
Bild 8.11: Rauchmelder, Funktionsprinzip

KAPITEL 9

Anhang

9.1 Anschauliche Einführung des Flußintegrals (und Linienintegrals):

Herkömmliche Integrale



Teilfläche: $F_i = f_i \cdot \delta x_i$

Fläche: $F = \sum_i f_i \cdot \delta x_i$

bei $\delta x_i \rightarrow 0$

unendlich viele Streifen
Integrationsgebiet
Intervall $a \dots b$

statt $\sum \rightarrow \int$

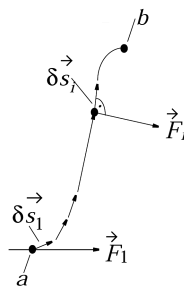
statt $\delta \rightarrow dx$

also: $F = \int_a^b f(x) \cdot dx$

f ist Funktion von (x) , also auf einem *ein*dimensionalen Gebiet definiert,

$$F = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Linienintegrale



Teilarbeit: $W_i = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{s}_i$

Arbeit längs Γ : $W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{s}_i$

bei $\delta \vec{s}_i \rightarrow 0$

unendlich viele Schritte
Integrationsgebiet
 $\Gamma = \text{Weg } a \rightarrow b$

statt $\sum \rightarrow \int$

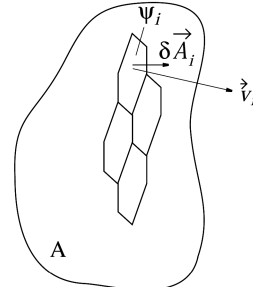
statt $\delta \rightarrow ds$

also: $W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$\vec{F}$ ist Funktion von (x, y, z) , also auf einem *drei*dimensionalen Gebiet definiert,

$$W = \int_a^b \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{s}$$

Flußintegrale



Teilfluß: $\psi_i = \vec{v}_i \cdot \delta \vec{A}_i$

Fluß: $\psi = \sum_i \vec{v}_i \cdot \delta \vec{A}_i$

bei $\delta \vec{A}_i \rightarrow 0$

unendlich viele Maschen
Integrationsgebiet
Fläche A

statt $\sum \rightarrow \int$

statt $\delta \rightarrow dA$

also: $\psi = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A}$

$\vec{v}$ ist Funktion von (x, y, z) , also auf einem *drei*dimensionalen Gebiet definiert,

$$\psi = \int_A \vec{v}(x, y, z) \cdot d\vec{A}$$

9.2 Maxwellgleichungen in differentieller Form

$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0}$	I	die Ladung ρ ist Quelle des elektrischen Feldes
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	II	es gibt keine magnetischen Quellen (Monopole)
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	III	Änderungen der Flussdichte $\rightarrow$ el. Wirbelfeld
$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$	IV	elektrische Ströme $\rightarrow$ magnetisches Wirbelfeld

Zusammen mit dem Kraftgesetz (Lorentzkraft)

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

erhält man eine vollständige Charakterisierung der Elektrodynamik für isotrope Materialien. Die Eigenschaften von isotropen Materialien hängen nicht von der Richtung ab.

9.3 Widerstandscodierung

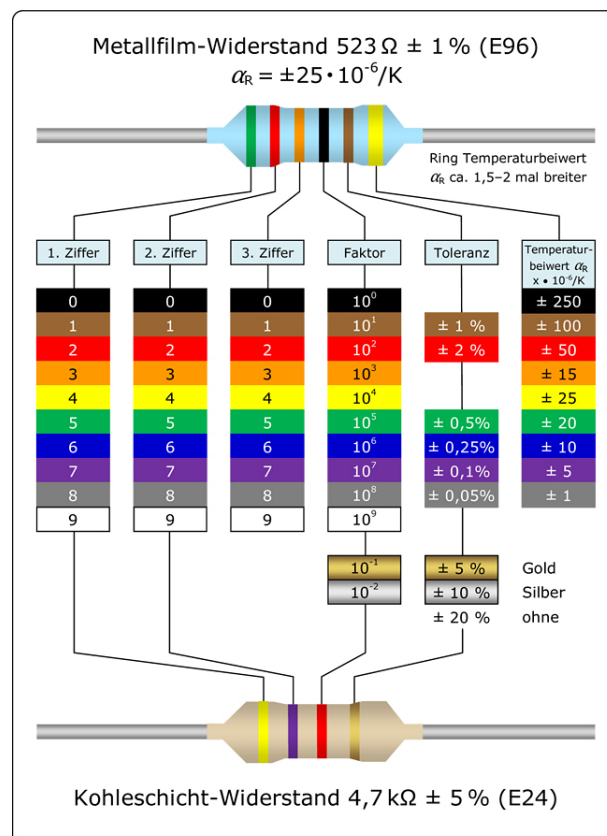


Tabelle mit Einheiten und Konstanten

Symbol	physikalische Größe	Einheit	MKSA-Einheit	el. Einheit
i, I	elektr. Strom	A (Ampere)	A	A
u, U	elektr. Spannung	V (Volt)	$\text{m}^2\text{kg s}^{-3}\text{A}^{-1}$	V
G	elektr. Leitwert	S (Siemens)	$\text{m}^{-2}\text{kg}^{-1}\text{s}^3\text{A}^2$	AV^{-1}
R	elektr. Widerstand	Ω (Ohm)	$\text{m}^2\text{kg s}^{-3}\text{A}^{-2}$	VA^{-1}
R_m	magn. Widerstand		$\text{m}^{-2}\text{kg}^{-1}\text{s}^2\text{A}^2$	$\text{AV}^{-1}\text{s}^{-1}$
$\vec{E}$	elektr. Feldstärke		$\text{m kg s}^{-3}\text{A}^{-1}$	Vm^{-1}
$\vec{D}$	elektr. Flussdichte		m^{-2}sA	Asm^{-2}
$\vec{J}$	elektr. Stromdichte		m^{-2}A	Am^{-2}
$\vec{H}$	magn. Feldstärke		m^{-1}A	Am^{-1}
$\vec{B}$	magn. Flussdichte	T (Tesla)	$\text{kg s}^{-2}\text{A}^{-1}$	Vsm^{-2}
ϵ	Permittivität		$\text{m}^{-3}\text{kg}^{-1}\text{s}^4\text{A}^2$	$\text{AsV}^{-1}\text{m}^{-1}$
μ	Permeabilität		$\text{m kg s}^{-2}\text{A}^{-2}$	$\text{VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$
Q	elektr. Ladung	C (Coulomb)	sA	As
C	Kapazität	F (Farad)	$\text{m}^{-2}\text{kg}^{-1}\text{s}^4\text{A}^2$	AsV^{-1}
L	Induktivität	H (Henry)	$\text{m}^2\text{kg s}^{-2}\text{A}^{-2}$	VsA^{-1}
P	Leistung	W (Watt)	$\text{m}^2\text{kg s}^{-3}$	VA
A	Arbeit	J (Joule)	$\text{m}^2\text{kg s}^{-2}$	VAs
Φ	magn. Fluss	Wb (Weber)	$\text{m}^2\text{kg s}^{-2}\text{A}^{-1}$	Vs
κ	elektr. Leitfähigkeit		$\text{m}^{-3}\text{kg}^{-1}\text{s}^3\text{A}^2$	$\text{AV}^{-1}\text{m}^{-1}$
Θ	elektr. Durchflutung	A (Ampere)	A	A
$\vec{F}$	Kraft	N (Newton)	m kg s^{-2}	VAsm^{-1}
f	Frequenz	Hz (Hertz)	s^{-1}	
ω	Kreisfrequenz		s^{-1}	
$\vec{v}$	Geschwindigkeit		ms^{-1}	
$\vec{a}$	Beschleunigung		ms^{-2}	

Symbol	Wert	Konstante
e	$1,602176487 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	Elementarladung
m_e	$9,109382914 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	Elektronen Ruhemasse
n	$1,660538921 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	Atomare Masseneinheit
c_0	$299792458 \text{ ms}^{-1}$	Vakuumlichtgeschwindigkeit
μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$	Vakuumpermeabilität
ϵ_0	$\mu_0^{-1}c_0^{-2} = 8,85418781762 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1}\text{m}^{-1}$	Vakuumpermittivität
g	$9,80665 \text{ ms}^{-2}$	Erdbeschleunigung

Name	Zeichen	Multiplikator	Name	Zeichen	Multiplikator
Exa	E	10^{18}	Dezi	d	10^{-1}
Peta	P	10^{15}	Zenti	c	10^{-2}
Tera	T	10^{12}	Milli	m	10^{-3}
Giga	G	10^9	Mikro	μ	10^{-6}
Mega	M	10^6	Nano	n	10^{-9}
Kilo	k	10^3	Piko	p	10^{-12}
Hekto	h	10^2	Femto	f	10^{-15}
Deka	da	10^1	Atto	a	10^{-18}