Übungsaufgaben zur Fourier-Analyse - Musterlösung

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für folgende Funktionen ihre Fourierreihe

(i) $f(t) = \cos^2(t)$,

(ii) $f(t) = \sin^3(t)$.

Lösung zu Aufgabe 1

Wir können uns das Integrieren sparen und können direkt die folgende Gleichheit zeigen (welche auch im Papula gezeigt ist):

(i) $f(t) = \cos^2(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$,

(ii) $f(t) = \sin^3(t) = \frac{1}{4}(3\sin(t) - \sin(3t))$.

Der Vorteil von diesem Vorgehen ist, dass wir daraus sofort die Fourierreihen bzw. die Koeffizienten ablesen können.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die T-periodische Funktion $f(t) = t^2$ für $0 \leq t \leq T$ in eine Fourierreihe. Welcher Wert ergibt sich an der Sprungstelle $t = T$? Was ergibt sich hieraus für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, wenn $T = 2\pi$ gesetzt wird?

Lösung zu Aufgabe 2

Es ist

$$f(t) = \frac{1}{3}T^2 + \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\omega_0 t) - \frac{T^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega_0 t).$$

Der Wert an der Sprungstelle ist der Mittelwert zwischen den beiden zugehörigen angrenzenden Grenzwerten $f(T) = \frac{T^2}{2}$. Wenn wir $t = T = 2\pi$ einsetzen, so liefert dies

$$f(2\pi) = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Andererseits wissen wir, dass $f(2\pi) = \frac{T^2}{2} = 2\pi^2$. Daraus folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 3

Führen Sie die harmonsiche Analyse für den trapezförmigen Impuls, siehe Abbildung 1. Geben Sie hierzu die Funktion $f(x)$ zunächst an.

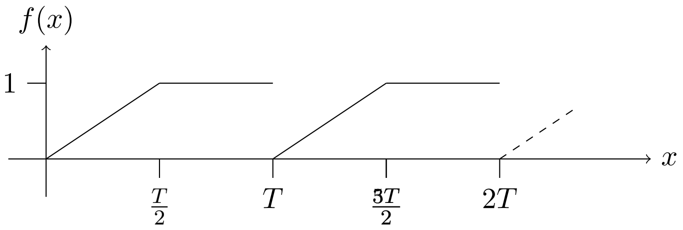

Abbildung 1: Trapezförmiger Impuls

Lösung zu Aufgabe 3

Der trapezförmige Impuls (auf dem Intervall $[0,T]$) lässt sich zunächst schreiben als

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{T}t, & 0 \leq x \leq \frac{T}{2}, \\ 1, & \frac{T}{2} \leq x \leq T, \end{cases}$$

welches sich periodisch danach fortsetzt. Wir berechnen nun die Fourierkoeffizienten gemäß der Definition:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\ dx \\ &= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T}x\ dx + \int_{\frac{T}{2}}^T 1\ dx\right) = \frac{1}{T}\left(\frac{2}{T}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{T}\frac{T}{2}\right) \\ &= \frac{2}{T^2}\left(\frac{T^2}{8} - 0\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Damit wäre der konstante Koeffizient berechnet. Für $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir weiter:

$$
\begin{aligned}
a_n =& \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\ dx\\
=& \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T}x\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\ dx + \int_{\frac{T}{2}}^T 1\cdot\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\ dx\right)\\
=& \frac{4}{T^2}\int_0^{\frac{T}{2}} x\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\ dx + \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^T \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\ dx\\
=& \frac{4}{T^2}\left[\frac{T}{n2\pi}x\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + \left(\frac{T}{n2\pi}\right)^2\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\right]_0^{\frac{T}{2}}\\
&+ \frac{2}{T}\left[\frac{T}{n2\pi}x\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\right]_{\frac{T}{2}}^T\\
=& \frac{4}{T^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2n^2}\left(\cos(n\pi)-\cos(0)\right) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi^2n^2}, & n \text{ gerade,}\\ 0, & n \text{ ungerade}\end{cases}
\end{aligned}
$$

und auf analoge Weise:

$$
\begin{aligned}
b_n =& \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\ dx\\
=& \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T}x\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\ dx + \int_{\frac{T}{2}}^T 1\cdot\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\ dx\right)\\
=& \frac{4}{T^2}\left[-\frac{T}{n2\pi}x\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + \left(\frac{T}{n2\pi}\right)^2\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\right]_0^{\frac{T}{2}}\\
&+ \frac{2}{T}\left[-\frac{T}{n2\pi}x\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\right]_{\frac{T}{2}}^T\\
=& -\frac{4}{T^2}\frac{T}{n2\pi}\frac{T}{2}\cos(n\pi) + \frac{2}{T}\frac{T}{n2\pi}\left(-\cos(2n\pi)\cos(n\pi)\right) = -\frac{1}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Fourierreihe gegeben durch

$$
f(x) = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right).
$$

Aufgabe 4

Gegeben Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right), & 0 < x < 2\pi, \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \text{ oder } x = 2\pi, \end{cases}$$

welche periodisch fortgesetzt wird. Skizzieren Sie die Funktion und geben Sie ihre Fourierreihe an.

Lösung zu Aufgabe 4

Die Funktion hat die Form wie in Abbildung 2 skizziert. Wir versuchen

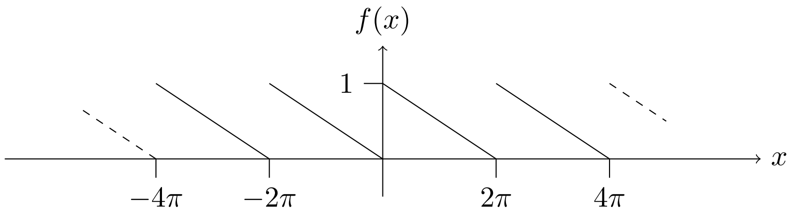

Abbildung 2: Skizze.

nun die Funktion in eine Fourierreihe zu entwickeln. Wir bemerken, dass die Funktion weder punkt- noch achsensymmetrisch ist und weiter die Periodenlänge $T = 2\pi$ ist. Daher müssen wir alle Koeffizienten berechnen:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\ dx = \frac{1}{2}.$$

Damit haben wir zunächst den konstanten Koeffizienten berechnet. Weiter gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ und somit:

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cos(nx)\ dx = 0$$

und analog

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\ dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \sin(nx)\ dx = \frac{1}{n\pi}.$$

Damit ist also

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx).$$

Aufgabe 5

Geben Sie für die Funktion in Abbildung 3 einen formelmäßigen Ausdruck an. Berechnen Sie die zugehörige Fourierreihe. Gibt es vielleicht eine Symmetrie, welche man ausnutzen könnte?

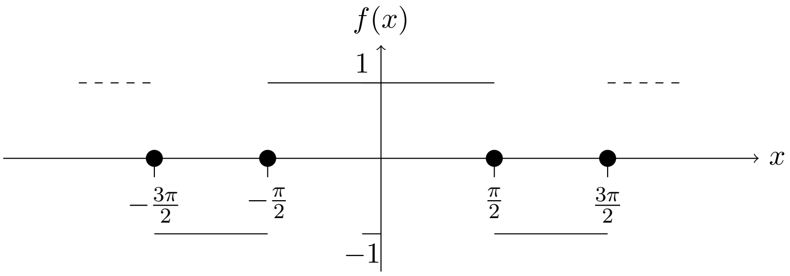

Abbildung 3: Rechteck Impuls

Lösung zu Aufgabe 5

Zunächst bemerken wir, dass die Funktion eine Periode von $T = 2\pi$ hat und lässt sich durch die folgende Funktion auf $[-\pi, \pi]$ ausdrücken:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x = \pm\frac{\pi}{2}, \\ -1, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Des Weiteren ist die Funktion dankbarerweise achsensymmetrisch, weswegen wir nur die Kosinuskomponenten berechnen müssen, d.h. $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{R}$. Es ist weiter:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{2\pi} \left(- \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \right) = 0.$$

Für die weiteren Koeffizienten nutzen wir die Symmetrie mehr aus und berechnen die Koeffizienten auf $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx)\ dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\ dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx)\ dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \frac{2}{n\pi} \left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{4}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade}, \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 5, 9, \dots, \\ -\frac{4}{n\pi}, & n = 3, 7, 11, \dots, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}_0,\ k \text{ gerade}, \\ -\frac{4}{n\pi}, & n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}_0,\ k \text{ ungerade}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Anders können wir ausdrücken, dass die Koeffizienten a_n ungleich Null sind, falls n ungerade ist, also die Gestalt $n = 2k+1$ für $k \in \mathbb{N}_0$ hat. Für gerades k hat a_n positives Vorzeichen, für ungerades k hat a_n negatives Vorzeichen. Damit hat die Fourierreihe die Gestalt:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \cos\left((2k+1)x\right)$$