- Skript -

IWT: Mathematik Auffrischungskurs

Prof. Dr. Stephan Sauter

IWT - Institut für Weiterbildung, Wissens- und Technologietransfer
IWT Wirtschaft und Technik GmbH
Fallenbrunnen 14
88045 Friedrichshafen

22. Dezember 2023

Inhaltsverzeichnis

Zielsetzung 1

1 Grundlagen 2
- 1.1 Mengen . . . 2
- 1.2 Zahlen . . . 4
- 1.3 Binomialkoeffizienten, Fakultäten . . . 6
- 1.4 Potenzen und Wurzeln . . . 7
- 1.5 Logartithmen . . . 8
- 1.6 Zahlenfolgen . . . 9
- 1.7 Gleichungen . . . 10
- 1.8 Anspruchsvolle Aufgaben . . . 16

2 Funktionen 18
- 2.1 Elementare Funktionen . . . 20
- 2.2 Eigenschaften . . . 26
- 2.3 Nullstellen . . . 27
- 2.4 Stetigkeit . . . 30
- 2.5 Umkehrfunktion . . . 31
- 2.6 Anspruchsvolle Aufgaben . . . 32

3 Trigonometrie 34
- 3.1 Gradmaß und Bogenmaß . . . 34
- 3.2 Winkelfunktionen . . . 35
- 3.3 Arcusfunktionen . . . 40
- 3.4 Trigonometrische Gleichungen . . . 41
- 3.5 Anspruchsvolle Aufgaben . . . 42

4 Differential- und Integralrechnung 44
- 4.1 Definition der Differenzierbarkeit . . . 44
- 4.2 Ableitungsregeln für differenzierbare Funktionen . . . 45
- 4.3 Extremstellen . . . 46
- 4.4 Tabelle mit Ableitungen und Stammfunktionen . . . 47
- 4.5 Definition Integrierbarkeit . . . 48
- 4.6 Integrationsregeln . . . 48
- 4.7 Anspruchsvolle Aufgaben . . . 50

5 Vektorrechnung 53
- 5.1 Definition . . . 53
- 5.2 Vektoren im kartesischen Koordinatensystem . . . 55
- 5.3 Geraden . . . 57
- 5.4 Ebenen . . . 60
- 5.5 Lagebestimmung . . . 61
- 5.6 Anspruchsvolle Aufgaben . . . 63

Zielsetzung

Dieses Skript ist für den 4-tägigen Mathematik-Auffrischungskurs des IWT erstellt. Die wichtigsten mathematischen Definitionen werden kurz beschrieben und dann in Übungsaufgaben vertieft. Der Kurs geht von einer guten mathematischen Schulbildung der Teilnehmer aus und will die dort erlernten Kenntnisse und Methoden nur mehr auffrischen.

Die Themen sind speziell im Hinblick auf die Anwendung im Studium ausgewählt. Die Aufgaben verstehen sich als Grundmenge zum Üben, müssen und können nicht alle im vorgegebenen Zeitraum erarbeitet werden. Am Ende jedes Kapitels finden sich anspruchsvolle Aufgaben, die die im Kapitel bearbeiteten Themen in technischen Anwendungsaufgaben der ersten beiden Semester, zeigt.

Im Lösungs-Skript sind die Ergebnisse der Aufgaben zum Vergleich enthalten. Für die anspruchsvollen Aufgaben sind die Lösungswege im Detail notiert, so dass diese Aufgaben auch im Selbststudium durchgeführt werden können.

KAPITEL 1

Grundlagen

1.1 Mengen

Schreibweise:

$M = \{1{,}2{,}3\}$	aufzählende Form einer endlichen Menge
$M = \{1{,}2{,}3,\ldots\}$	aufzählende Form einer unendlichen Menge
$M = \{x \mid x \text{ mit der Eigenschaft}\}$	beschreibende Form
$\emptyset$ oder $\{\}$	leere Menge
Ω oder $\{\}$	Gesamtmenge

Mengenoperationen/relationen:

Vereinigung	$\cup$	Durchschnitt	$\cap$
Differenzmenge	$\setminus$	Komplementmenge	$\overline{A}$
Teilmenge	$\subset$	Obermenge	$\supset$
Element der Menge	$\in$	nicht Element der Menge	$\notin$

Intervalle:

$[a;b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$	geschlossenes Intervall
$(a;b) = \{x \mid a < x < b\}$	offenes Intervall
$(a;b] = \{x \mid a < x \leq b\}$	halboffenes Intervall
$[a;b) = \{x \mid a \leq x < b\}$	halboffenes Intervall

Bestimmen Sie die folgenden Mengen

a) $(-\infty;4) \cup [4;\infty)$ $\mathbb{R}$

b) $[-4;2) \cap [0;4)$ $[0;2)$

c) $(-\infty;4) \cap [3;\infty)$ $[3;4)$

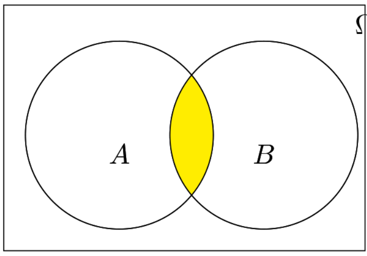
d) $(-\infty;4) \cup [3;\infty)$ $\mathbb{R}$

e) $[-4;2) \cap [0;2)$ $[0;2)$

f) $(-2;2) \cap [2;4)$ $\emptyset$

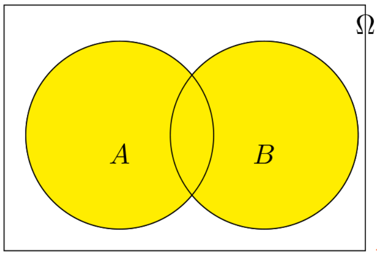
Beschreiben Sie die Mengen, die in den folgenden Venn-Diagrammen gelb unterlegt sind (ohne Negierungen).

a)



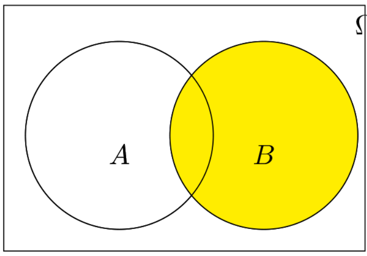
$A \cap B$

b)



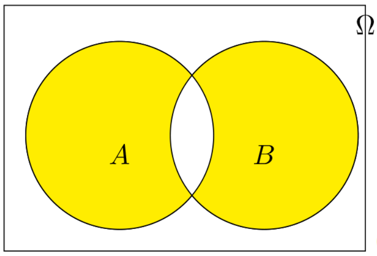
$A \cup B$

c)



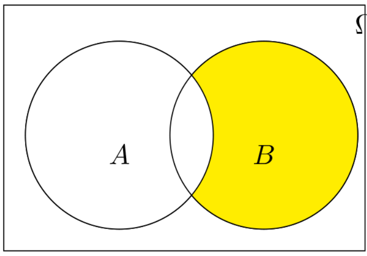
B

d)



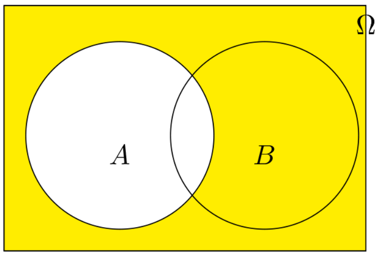
$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

e)



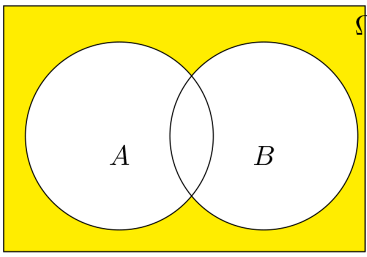
$B \setminus A$

f)



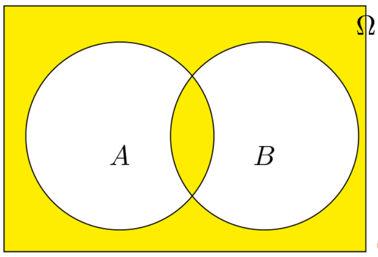
$\Omega \setminus A$

g)



$\Omega \setminus (A \cup B)$

h)



$\Omega \setminus (A \cup B) \cup (A \cap B)$

1.2 Zahlen

Zahlenmengen:

$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,4,...\}$	natürliche Zahlen mit 0
$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1,0,1,2,3,...\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{R}$ un- endliche Dezimalzahlen	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen (1. Semester)

Relationen zwischen Zahlen:

$a = b$	a gleich b	$a \neq b$	a ungleich b
$a < b$	a kleiner b	$a \leq b$	a kleiner oder gleich b
$a > b$	a größer b	$a \geq b$	a größer oder gleich b

Rechenregeln für Zahlen:

Kommutativgesetz	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Assoziativgesetz	$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$	$(ab)c = a(bc) = abc$
Distributivgesetz	$a(b + c) = ab + ac$	

Vorzeichen:

Ein Vorzeichen "-" entspricht einem Faktor (-1)

$-(a + b) = -a - b \qquad -(a - b) = -a + b$

$-(ab) = (-a)b = a(-b) \qquad ab = (-a)(-b)$

$-\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} \qquad \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{für } n \text{ gerade} \\ -a^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Rechenregeln für Brüche:

Erweitern	$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$	$b,c \neq 0$
Kürzen	$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$b,c \neq 0$
Addieren	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad + bc}{bd}$	$b,d \neq 0$
Subtrahieren	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{db} = \frac{ad - bc}{bd}$	$b,d \neq 0$
Multiplizieren	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$b,d \neq 0$
Dividieren	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$b,c,d \neq 0$

Vereinfachen Sie folgende Terme

a) $\dfrac{3x^2-5x}{10-6x} = \dfrac{x(3x-5)}{2(5-3x)} = -\dfrac{x}{2}$ für $x \neq \dfrac{5}{3}$

b) $\dfrac{2a^2+6b^2}{a^4-9b^4} = \dfrac{2(a^2+3b^2)}{(a^2+3b^2)(a^2-3b^2)} = \dfrac{2}{a^2-3b^2}$

c) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2+2x-15} = \dfrac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+5)} = \dfrac{x-4}{x+5}$ für $x \neq 3$

Vereinfachen Sie folgende Brüche

a) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \dfrac{\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}}{\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}} = \dfrac{a+b}{b-a}$

b) $\dfrac{\frac{a^2}{2}+\frac{bc}{8}}{8a^2+2bc} = \dfrac{8a^2+2bc}{16(8a^2+2bc)} = \dfrac{1}{16}$ für $4a^2+bc \neq 0$

c) $\dfrac{\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a-1}}{\frac{1}{a^2-1}} = a(a-1)+a(a+1) = 2a^2$

Berechnen Sie den Gesamtwiderstand; bringen Sie auf einen Bruch

a) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2} = \dfrac{R_2+R_1}{R_1R_2} \quad \Longrightarrow \quad R = \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$

b) $R = \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)^{-1} + R_3 = \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_3 = \dfrac{R_1R_2+R_3R_1+R_3R_2}{R_1+R_2}$

c) $$R = \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)^{-1} + \left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)^{-1} = \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \dfrac{R_3R_4}{R_3+R_4}$$

$$= \dfrac{R_1R_2R_3+R_1R_2R_4+R_1R_3R_4+R_2R_3R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}$$

Multiplizieren Sie folgende Brüche mit -1

a) $\dfrac{a-b}{a+c} = (-1)\dfrac{a-b}{a+c} = \dfrac{b-a}{a+c}$

b) $\dfrac{a+b}{-c-d} = (-1)\dfrac{a+b}{-c-d} = \dfrac{a+b}{c+d}$

c) $\dfrac{a-b}{c-d} = (-1)\dfrac{a-b}{c-d} = \dfrac{b-a}{c-d}$

Zahlensysteme:

1001 1111	Binärzahlen	Dualsystem
A0 FF 89 1111		Hexadezimalsysgtem
103,234		Dezimalsystem

Wandeln Sie die angegebenen Zahlen in ein anderes Zahlensystem um

a) 1001 1111 als Hexadezimalzahl = 9F

b) 1001 1111 als Dezimalzahl = 159

c) A0 FF als Dezimalzahl = 41215

d) A0 FF als Binärzahl = 1010 0000 1111 1111

e) 32 als Hexadezimalzahl = 20

f) 33 als Binärzahl = 10 0001

1.3 Binomialkoeffizienten, Fakultäten

Binomische Formeln:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
(a-b)^4 &= a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4
\end{aligned}$$

Pascalsches Dreieck:
Jeder Eintrag im Pascalschen Dreieck ist die Summe der zwei darüberstehenden Einträge

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

entspricht dem Eintrag im Pascalschen Dreieck in Zeile n an der k. Stelle (Zählung beginnt jeweils mit 0)

Die Koeffizienten der Binomischen Formeln sind die Binomialkoeffizienten.

Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist das Produkt aller nat. Zahlen von 1 bis n

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{für } n=0 \\ 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n & \text{für } n>0 \end{cases}$$

Berechnen Sie folgenden binomischen Ausdrücke

a) $(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

b) $(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

c) $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

d) $(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

Ergänzen Sie die nachfolgenden Summen zu einem binomischen Quadrat

a) $x^2 + 4x + ... = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

b) $4x^2 + 8xy + ... = 4x^2 + 8xy + 4y^2 = (2x+2y)^2$

c) $16a^2 + 64b + ... = 16a^2 + 64b + \frac{b^2}{a^2} = \left(4a + 8\frac{b}{a}\right)$

d) $x^2 - xy + ... = x^2 - xy - \frac{1}{4}y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2$

e) $x^4 - 8x^2y + ... = x^4 - 8x^2y + 16y^2 = (x^2 - 4y)^2$

f) $-4x^2 + 16xy^2 + ... = -(4x^2 - 16xy^2 + 16y^4) = -(2x - 4y^2)^2$

g) $2x^2 - 2x\sqrt{3y} + ... = 2x^2 - 2x\sqrt{3y} + \dfrac{3y}{2} = \left(\sqrt{2}x - \dfrac{\sqrt{3y}}{\sqrt{2}}\right)^2$

h) $2a + 3\sqrt{2ab} + ... = 2a + 3\sqrt{2ab} + \dfrac{9}{4}b = \left(\sqrt{2a} + \dfrac{3}{2}\sqrt{b}\right)^2$

i) $0.004a^2 + 0.008ab^2 + ... = 0.004a^2 + 0.008ab^2 + 0.04b^4 = (0.02a + 0.2b^2)^2$

1.4 Potenzen und Wurzeln

Potenzen und Wurzeln:

Eine Potenz besteht aus der Basis $a \in \mathbb{R}$ und dem Exponenten (Hochzahl) $n,m \in \mathbb{N}_0$

gleiche Basis	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\left(a^n\right)^m = a^{m \cdot n}$
gleicher Exponent	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$	

Spezialfälle:

$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

Rechnen mit Wurzeln:

Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Gleichung $a = x^n$ genau eine nicht negative, reelle Lösung, die als n-te Wurzel aus a bezeichnet wird: $\sqrt[n]{a}$

$\sqrt[1]{a} = a$	$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a^n} = a$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$

Sei $a > 0$. Vereinfachen Sie

a) $\sqrt{a^4} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^2} = a \cdot a = a^2$

b) $a^5 \cdot a^{-3} = a^{5-3} = a^2$

c) $a^3 \cdot \sqrt[4]{a} = a^3 \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{12}{4}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{13}{4}} = \sqrt[4]{a^{13}}$

d) $\left(\sqrt{a^3}\right)^5 = \sqrt{a^{3 \cdot 5}} = \sqrt{a^{15}}$

e) $\left(\sqrt{a^{-3}}\right)^{-2} = \left(a^{-\frac{3}{2}}\right)^{-2} = a^{\frac{3}{2} \cdot 2} = a^3$

f) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{4+3}{12}} = \sqrt[12]{a^7}$

g) $\dfrac{a}{a^{-2}} = a^{1+2} = a^3$

h) $a^{-2} \cdot \sqrt{a} = a^{-2} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{4}{2}+\frac{1}{2}} = a^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

1.5 Logartithmen

Als **Logarithmus** einer positiven Zahl x bezeichnet man den Exponenten, mit dem man eine festgelegte Basis b potenzieren muss, um die angegebene Zahl x zu erhalten, d.h.
$y = \log_b(x)$ ist die Lösung von $b^y = x$

Wichtige Basen:

$b = 2$	$y = \mathrm{lb}(x)$	dualer Logarithmus
$b = 10$	$y = \lg(x)$	dekadischer Logarithmus
$b = e$	$y = \ln(x)$	natürlicher Logarithmus

Umrechnung der Basen:

$$\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$

Rechenregeln:

$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ $\qquad$ $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

Vorsicht: $\log(a+b) \neq \log(a) + \log(b)$

Vereinfachen Sie folgende Terme

a) $e^x \cdot e^x = 2e^{2x}$

b) $\dfrac{2^x}{2^{2x}} = \dfrac{1}{2^x}$

c) $\log\left(\dfrac{x}{2x-1}\right) = \log(x) - \log(2x-1)$

d) $6^x \cdot 3^x = 18^x$

e) $a^{-\sqrt{x}} \cdot a^{\sqrt{x}} = a^0 = 1$

f) $\ln(xye^x) = \ln(x) + \ln(y) + x$

g) $\frac{1}{3}\ln\left(a^{3m}\right) - (m-1)\ln(a) = \ln(a)$

Lösen Sie nach x auf

a) $10^a \cdot 100^{b-3} \cdot 3^c = 10^x \implies x = \log_{10}\left(10^a \cdot 100^{b-3} \cdot 3^c\right) = a + 2b - 6 + c \cdot \log_{10}(3)$

b) $\frac{4}{3^{2x}} - \frac{2}{3^x} = 0 \implies 4 - 2 \cdot 3^x = 0 \implies x = \log_3(2)$

c) $15 = 3^x + 9 \implies x = \log_3(6) = \log_3(2) + 1$

Wie lautet der Exponent zur Basis e von

a) $7 = e^{\ln(7)}$

b) $10^3 e^x = e^{3\ln(10)+x}$

c) $\ln(3) = e^{\ln\left(\ln(3)\right)}$

d) $\frac{1}{x^2} = e^{-2\ln(x)}$

1.6 Zahlenfolgen

Eine **Zahlenfolge**, oder kurz **Folge**, ist eine Aufzählung von unendlich vielen fortlaufend numerierten Zahlen: $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Mathematische Definition: Eine Folge ist eine Abbildung
$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \to a_n$

Eulersche Zahl e:

Die Eulersche Zahl ist der Grenzwert der Zahlenfolge: (a_n) mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718$$

Bestimmen Sie die ersten 3 Elemente folgender Zahlenfolgen

a) $a_n = \frac{1}{n+1}$ $\quad a_0 = 1;\ a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{1}{3}$

b) $a_n = 2n$ $\quad a_0 = 0;\ a_1 = 2;\ a_2 = 4$

c) $a_n = 2n + 1$ $\quad a_0 = 1;\ a_1 = 3;\ a_2 = 5$

d) $a_n = \cos(n\pi)$ $\quad a_0 = \cos(0 \cdot \pi) = 1;\ a_1 = \cos(\pi) = -1;\ a_2 = \cos(2\pi) = 1$

e) $a_n = n!$ $a_0 = 1;\ a_1 = 1! = 1;\ a_2 = 2! = 2$

f) $a_n = (-1)^n$ $a_0 = 1;\ a_1 = -1;\ a_2 = 1$

g) $a_n = 4n + 1$ $a_0 = 1;\ a_1 = 5;\ a_2 = 9$

h) $a_n = \sin\Big(n\frac{\pi}{2}\Big)$ $a_0 = \sin(0 \cdot \pi) = 0;\ a_1 = \sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 1;\ a_2 = \sin\Big(2 \cdot \frac{\pi}{2}\Big) = 0$

Können Sie eine Regel angeben, nach der sich folgende Zahlenfolgen berechnen?

a) $(a_n) = (1{,}2{,}4{,}8{,}16{,}\ldots) \implies a_n = 2^n$

b) $(a_n) = (0{,}1{,}0{,}1{,}0{,}\ldots) \implies a_n = \frac{1}{2}\Big(1 - (-1)^n\Big)$ oder auch $a_n = \sin^2(n\frac{\pi}{2})$

c) $(a_n) = \Big(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots\Big) \implies a_n = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n$

d) $(a_n) = \Big(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\Big) \implies a_n = \Big(\frac{1}{3}\Big)^n$

e) $(a_n) = \Big(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots\Big) \implies a_n = \Big(-\frac{1}{3}\Big)^n$

f) $(a_n) = \Big(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \ldots\Big) \implies a_n = \frac{1}{n!}$

1.7 Gleichungen

Eine Gleichung beschreibt eine Aussage über die Gleichheit 2er Terme, was mit einem Gleichheitszeichen dargestellt wird Lösen von Gleichungen, bedeutet die Bestimmung aller Werte der Unbekannten, für die die Gleichheit der Terme erfüllt ist.

Lineare Gleichungen:
Bei linearen Gleichungen kommen die Unbekannten ausschliesslich in Linearkombinationen vor
1 Unbekannte: Auflösen nach der Unbekannten durch äquivalente Umformungen
2 Unbekannte: Lösen durch Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren
≥ 3 Unbekannte: Lösen durch Gauß-Verfahren

Gauß-Verfahren:
Das Gauß-Verfahren wird in 2 Schritten durchgeführt

1) Durch Zeilenumformungen
   - Eine Zeile, oder das Vielfache einer Zeile wird zu einer anderen Zeile addiert
   - Zwei Zeilen werden vertauscht

   wird das Gleichungssystem in Stufenform gebracht (in jeder Zeile wird eine weitere Variable eliminiert)

2) Durch Einsetzen wird ausgehend von der letzten Zeile eine Variable berechnet und in die darüberliegende Zeile eingesetzt

Lösen Sie folgende lineare Gleichungen

a) $2x + y = 3 \implies y = 3 - 2x = -1$

$3x - 2y = 8 \implies 3x - 6 + 4x = 8 \implies x = 2$

b) $3x + 4y = 11 \implies 6y - 9 + 4y = 11 \implies y = 2$

$x - 2y = -3 \implies 3x - 6 + 4x = 8 \implies x = 2y - 3 = 1$

c) $x - 6y = -3 \implies x = 6y - 3 = 3$

$2x - y = 4x - 7 \implies 3x - 6 + 4x = 8 \implies 12y - 6 - y = 24y - 12 - 7 \implies y = 1$

Lösen Sie folgende linearne Gleichungssysteme

a) $$\begin{aligned} 3x + 3y - \ z &= 5 \implies \\ 4x + 5y + \ z &= -1 \\ 2x - 5y + 7z &= 9 \end{aligned}$$

	x	y	z	$=$	
I)	3	3	-1	5	
II)	4	5	-1	-1	3·II-4·I
III)	2	-5	7	9	3·III-2·I
I)	3	3	-1	5	
II)	0	3	7	-23	
III)	0	-21	23	17	III+7·II
I)	3	3	-1	5	
II)	0	3	7	-23	
III)	0	0	72	-144	

$\implies z = -2$

$3y = -23 + 14 = -9$

$\implies y = -3$

$3x - 9 + 2 = 5$

$\implies x = 4$

b) $$\begin{aligned} x + \ y + \ z &= 1 \implies \\ x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 4y + 7z &= 4 \end{aligned}$$

	x	y	z	$=$	
I)	1	1	1	1	
II)	1	2	3	2	II-I
III)	1	4	7	4	III-I
I)	1	1	1	1	
II)	0	1	2	1	
III)	0	3	6	3	III-3·II
I)	1	1	1	1	
II)	0	1	2	1	
III)	0	0	0	0	

$\implies z = t$ beliebig

$\implies y = -2t + 1$

$\implies x = 2t - 1 - t + 1 = t$

Lösungsgerade:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x - 2y \phantom{{}+z} &= 1 \\ -2x + y - 2z &= 1 \\ -2y + z &= 1 \end{aligned} \implies$$

	x	y	z	$=$	
I)	1	-2	0	1	
II)	-2	1	-2	1	II+2·I
III)	0	-2	1	1	
I)	1	-2	0	1	
II)	0	-3	-2	3	
III)	0	-2	1	1	3·III-2·II
I)	1	-2	0	1	
II)	0	-3	-2	3	
III)	0	0	7	-3	

$\implies z = -\frac{3}{7}$
$-3y + \frac{6}{7} = 3$
$\implies y = -1 + \frac{2}{7}$
$x + 2 - \frac{4}{7} = 1$
$\implies x = -\frac{3}{7}$

d)
$$\begin{aligned} 2x + 4y + 2z + u &= 2 \\ 3x - 3y + z &= -6 \\ x + y - 2z &= 8 \\ 4x - 2y + 3z &= -10 \end{aligned} \implies$$

	x	y	z	u	$=$	
I)	2	4	2	1	2	
II)	3	-3	1	0	-6	2·II-3·I
III)	1	1	-2	0	8	2·III-I
IV)	4	-2	3	0	-10	IV-2·I

$\implies u = 1$
$\implies z = -3$
$\implies y = \frac{3}{2}$
$\implies x = \frac{1}{2}$

Quadratische Gleichungen:

- abc-Form:

  $ax^2 + bx + c = 0$ hat 2 Lösungen $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- pq–Form:

  $x^2 + px + q = 0$ hat 2 Lösungen $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

(2 verschiedene Reelle, 2 identische Reelle oder zwei konjugiert Komplexe)

Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen

a) $x^2 + 8x + 15 = 0 \implies x_{1,2} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = -3; -5$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0 \implies x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = -\dfrac{1}{3}$

c) $x^2 - 2x + 5 = 0 \implies x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = 1 \pm 2i$

Gleichungen mit Brüchen, Wurzeln, Beträgen, Logarithmus, Exp.funktionen:

Bei Gleichungen mit Brüchen, Wurzeln und dem Logarithmus ist zunächst der Definitionsbereich festzulegen. Nur Lösungen im Definitionsbereich sind Lösungen der Gleichung.

- Gleichungen mit einer Unbekannten im Nenner werden durch Multiplikation mit dem Hauptnenner zu einem einfacheren Gleichungstyp umgeformt.
- Bei Gleichungen mit der Unbekannten unter einer Wurzel, wird zunächst die Wurzel isoliert und anschliessend die Gleichung quadriert. Da Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, muss die erhaltene Lösung in der Ausgangsgleichung überprüft werden.
- Befindet sich die Unbekannte in einem Logarithmus oder einer Exponentialfunktion, so wird jeweils die Umkehrfunktion auf die Gleichung angewandt.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen

a) $\dfrac{2x-4}{x+4} = \dfrac{6x}{3x-2} \quad \Longrightarrow \quad x \neq -4 \wedge x \neq \dfrac{2}{3}$

$(2x-4)(3x-2) = 6x(x+4) \iff 6x^2-4x-12x+8 = 6x^2+24x \iff 40x = 8 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{5}$

b) $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+4} \quad \Longrightarrow \quad x \neq -1 \wedge x \neq -4$

$x+4 = x^2+x \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x_{1,2} = \pm 2$

c) $\dfrac{5x+6}{7} - \dfrac{2x-9}{11} - 7 = 0 \quad \iff \quad 55x = 66 - 14x + 63 = 539 \Longrightarrow x = 10$

d) $\sqrt{7+x^2} - 2 = x \quad \iff \quad \sqrt{7+x^2} = x+2 \Longrightarrow 7+x^2 = x^2+4x+4 \Longrightarrow x = \dfrac{3}{4}$

e) $x+3\sqrt{x-1} = 1 \quad \iff \quad 3\sqrt{x-1} = 1-x \Longrightarrow 9x-9 = 1-2x+x^2 \iff x^2-11x+10 = 0$

$\Longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121-40}}{2} = 10; 1$

Test, da quadriert: $10+3\sqrt{9} = 19 \neq 1; \quad 1+3\sqrt{0} = 1 \Longrightarrow$ nur $x=1$ ist Lösung

f) $\dfrac{x-1}{2-x} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{6-x}{3x^2-12} \quad \Longrightarrow \quad x \neq 2 \wedge x \neq -2$

$3(x+2)(1-x) = 3(x+2) - 6 + x \iff -3x^2-3x+6 = 4x \iff 3x^2+7x-6 = 0$

$\Longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49+72}}{6} = \dfrac{2}{3}; -3$

g) $\sqrt{2x-24}+3 = x \quad \iff \quad \sqrt{2x-24} = x-3 \Longrightarrow 2x-24 = x^2-6x+9 \iff x^2-8x+33 = 0$

$\Longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-132}}{2} \Longrightarrow$ keine reelle Lösung

h) $\sqrt{3x^2-1} = \sqrt{7x-3} \quad \Longleftrightarrow \quad 3x^2-1 = 7x-3 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x^2-7x+2=0$

$\Longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = 2; \dfrac{1}{3}$

Test, da quadriert: $\sqrt{11} = \sqrt{14-3}$; $\sqrt{\dfrac{1}{3}-1} \notin \mathbb{R}$ nur $x = 2$ ist Lösung

i) $\sqrt{x+4} = 2 + \sqrt{x-2} \quad \Longrightarrow \quad x+4 = 4 + 4\sqrt{x-2} + x - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 4\sqrt{x-2} = 2$

$\Longrightarrow \quad 16(x-2) = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 16x = 36 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{9}{4}$

Test, da quadriert: $\sqrt{\dfrac{9}{4}+4} = \dfrac{5}{2} = 2 + \sqrt{\dfrac{9}{4}-2} = 2 + \dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{9}{4}$ ist eine Lösung

j) $\ln(2x-3) = \dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2x-3 = \sqrt{e} \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{\sqrt{e}+3}{2}$

k) $\ln(x^2) = 4 \quad \Longrightarrow \quad \ln(x) = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = e^2$

l) $\ln(x - \sqrt{e}) = \dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x - \sqrt{e} = \sqrt{e} \quad \Longrightarrow \quad x = 2\sqrt{e}$

m) $\dfrac{e^{-x}}{2} - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{-x} = 6 \quad \Longrightarrow \quad x = \; -\ln(6)$

n) $e^{3x} = e^{x^2-10} \quad \Longrightarrow \quad 3x = x^2-10 \Longrightarrow x^2-3x-10 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = 5; -2$

o) $2^x + 4 \cdot 2^{-x} - 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2^{2x} + 4 - 5 \cdot 2^x = 0 \Longrightarrow$ mit Substitution $u := 2^x$

$u^2 - 5u + 4 = 0 \Longrightarrow u_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = 4; 1$

Rücksubstitution: $2^x = 4 \Longrightarrow x_1 = 2$; $x^x = 1 \Longrightarrow x_2 = 0$

Ungleichungen

Terme, die durch eines der 4 Ungleichheitszeichen ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$) verbunden sind. Ungleichungen werden wie Gleichungen behandelt, nur bei Multiplikation/Division mit einer negativen Zahl, dreht sich das Ungleichheitszeichen.
Bei Ungleichungen mit Betragsfunktion, löst man die Beträge durch Fallunterscheidung auf.

Betrag einer Zahl:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für a} \geq 0 \\ -a & \text{für a} < 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender (Un-)Gleichungen

a) $8x + 7 \leq 10x - 13 \iff 20 \leq 2x \implies 10 \leq x$

b) $2x - 5 < 12 \iff 2x < 17 \implies x < \frac{17}{2}$

c) $\frac{x^2 - 7}{x - 1} < 3$

$\text{Fall}_1 : x - 1 > 0 : x^2 - 7 < 3x - 3 \iff x^2 - 3x - 4 < 0 \iff (x - 4)(x + 1) < 0$
$x - 4 < 0 \land x + 1 > 0 \implies x \in (1, 4)$
$x - 4 > 0 \land x + 1 < 0 \implies$ keine Lösung
$\text{Fall}_2 : x - 1 < 0 : x^2 - 7 > 3x - 3 \iff x^2 - 3x - 4 > 0 \iff (x - 4)(x + 1) > 0$
$x - 4 > 0 \land x + 1 > 0 \implies$ keine Lösung
$x - 4 < 0 \land x + 1 < 0 \implies x < -1$
$\mathbb{L} = (-\infty, -1) \cup (1, 4)$

d) $\frac{x^2 + 6}{x - 12} < x - 3$

$\text{Fall}_1 : x - 12 > 0 : x^2 + 6 < x^2 - 15x + 36 \iff x < 2 \iff \mathbb{L}_1 = \emptyset$
$\text{Fall}_2 : x - 12 < 0 : x^2 + 6 > x^2 - 15x + 36 \iff x < 2 \iff \mathbb{L}_2 = (2; 12)$

e) $\frac{x + 3}{x} \geq \frac{x}{x + 3}$

$\text{Fall}_{1a} : x > 0 \land x + 3 > 0 : x^2 + 6x + 9 \geq x^2 \implies x \geq -\frac{3}{2} \implies \mathbb{L}_1 = (0; \infty)$
$\text{Fall}_{1b} : x > 0 \land x + 3 < 0 :$ keine Lösung
$\text{Fall}_{2a} : x < 0 \land x + 3 > 0 : x^2 + 6x + 9 \leq x^2 \implies x \leq -\frac{3}{2} \implies \mathbb{L}_2 = \Big(-3; -\frac{3}{2}\Big]$
$\text{Fall}_{2b} : x < 0 \land x + 3 < 0 : x^2 + 6x + 9 \geq x^2 \implies x \geq -\frac{3}{2} \implies$ keine Lösung
$\mathbb{L} = \Big(-3; -\frac{3}{2}\Big] \cup \Big(0; \infty\Big)$

f) $\frac{1}{x + 2} \leq \frac{2}{x - 3}$

$\text{Fall}_{1a} : x + 2 > 0 \land x - 3 > 0 : x - 3 \leq 2x + 4 \implies x \geq -7 \implies \mathbb{L}_1 = (3; \infty)$
$\text{Fall}_{1b} : x + 2 < 0 \land x - 3 > 0 : x - 3 \geq 2x + 4 \implies x \leq -7 \implies$ keine Lösung
$\text{Fall}_{2a} : x + 2 < 0 \land x - 3 > 0 :$ keine Lösung
$\text{Fall}_{2b} : x + 2 < 0 \land x - 3 < 0 : x - 3 \leq 2x + 4 \implies x \geq -7 \implies \mathbb{L}_2 = [-7; -2)$
$\mathbb{L} = [-7; -2) \cup (3; \infty)$

g) $|x - 5 = 2x - 11|$

$\text{Fall}_1 : x - 5 \geq 0 : x - 5 = 2x - 11 \implies x_1 = 6$
$\text{Fall}_2 : x - 5 < 0 : -x + 5 = 2x - 11 \implies x = \frac{16}{3}$ keine Lösung, da $\frac{16}{3} - 5 > 0$

h) $3x + 5 = -2|x - 1|$

$\text{Fall}_1 : x - 1 \geq 0 : 3x + 5 = -2x + 2 \implies x_1 = -\frac{3}{5}$ keine Lösung da $-\frac{3}{5} - 1 > 0$
$\text{Fall}_2 : x - 1 < 0 : 3x + 5 = -2x + 2 \implies x_2 = -7$

i) $|x-1|-2|x|=-3$

$\text{Fall}_{1a}: x-1\geq 0 \wedge x\geq 0: x-1-2x=-3 \implies x=2$
$\text{Fall}_{1b}: x-1\geq 0 \wedge x<0:$ keine Lösung
$\text{Fall}_{2a}: x-1<0 \wedge x\geq 0: -x+1-2x=-3 \implies x=\frac{4}{3}$ keine Lösung, da $\frac{4}{3}-1>0$
$\text{Fall}_{2b}: x-1<0 \wedge x<0: x-1-2x=-3 \implies x_2=-4$

j) $|3x-6|\leq x+2$

$\text{Fall}_1: 3x-6\geq 0: 3x-6\leq x+2 \iff x\leq 4 \iff \mathbb{L}_1=[2;4]$
$\text{Fall}_2: 3x-6<0: -3x+6\leq x+2 \iff x\geq 1 \iff \mathbb{L}_2=[1;2)$
$\mathbb{L}=[1;4]$

k) $|x+5|<x-4$

$\text{Fall}_1: x+5\geq 0: x+5<x-4 \implies$ keine Lösung
$\text{Fall}_2: x+5<0: -x-5<x-4 \implies -1<2x \implies x>-\frac{1}{2} \Rightarrow$ keine Lösung
$\mathbb{L}=\emptyset$

l) $|x-3|\geq 5$

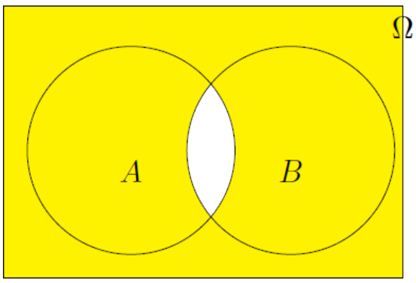
$\text{Fall}_1: x-3\geq 0: x-3\geq 5 \implies x\geq 8 \implies$ keine Lösung
$\text{Fall}_2: x-3<0: -x+3\geq 5 \implies -2\geq x \implies \mathbb{L}=[-\infty;-2)$

1.8 Anspruchsvolle Aufgaben

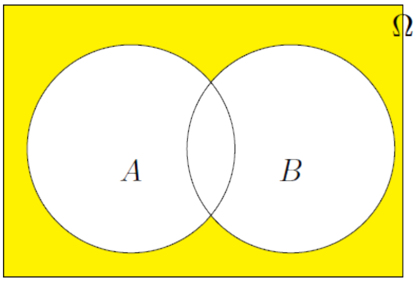
Verifizieren Sie die deMorgan-Regeln am Venn-Diagramm

Seien A,B Teilmengen einer Grundmenge Ω, dann gilt:

a) $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$

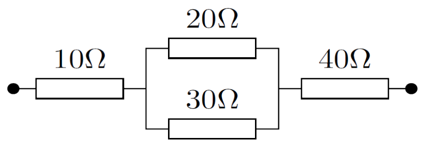


b) $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$



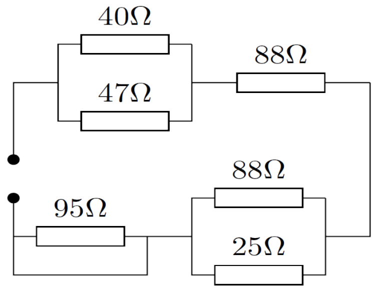
Berechnen Sie den Gesamtwiderstand folgender Schaltungen

a)



$$R = 10\ \Omega + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right)^{-1} \Omega + 40\Omega = 50\ \Omega + \frac{600}{50}\Omega = 62\ \Omega$$

b)



$$R = \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{47}\right)^{-1} \Omega + 88\ \Omega + \left(\frac{1}{88} + \frac{1}{25}\right)^{-1} \Omega$$
$$= \left(\frac{1880}{87} + 88 + \frac{2200}{113}\right) \Omega \approx 129.08\ \Omega$$

Adiabatische Zustandsänderung

Bei adiabatischen Zustandsänderungen idealer Gase gilt: $\dfrac{p_1^{\kappa-1}}{T_1^{\kappa}} = \dfrac{p_2^{\kappa-1}}{T_2^{\kappa}}$

Nun komprimieren Sie die Luft in einer Luftpumpe auf den doppelten Druck $p_2 = 2p_1$.

Auf welche Temperatur T_2 erwärmt sie sich, wenn vorher $T_1 = 300$ K (Kelvin) gilt?

$\kappa = 1.4$

$$T_2 = \sqrt[\kappa]{T_1^{\kappa} \frac{p_2^{\kappa-1}}{p_1^{\kappa-1}}} = T_1 \cdot 2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 300 \cdot 2^{0.2857} = 365.7$$

Geben Sie alle Lösungen (x,y) folgender Gleichungssysteme an

a) $0 = 3(x^2 - 1) \implies x = \pm 1$
$0 = 3(y^2 - 4) \implies y = \pm 2$

$\mathbb{L} = \{(1,2); (1,-2); (-1,2); (-1,-2)\}$

b) $0 = ye^{-x-y}(1-x) \implies y = 0; x = 1$
$0 = xe^{-x-y}(1-y) \implies x = 0; y = 1$

$\mathbb{L} = \{(0,0); (1,1)\}$

c) $0 = ye^{-x-y} - xye^{-x-y} \implies y = 0; x = 1$
$0 = xe^{-x-y} - xye^{-x-y} \implies x = 0; y = 1$

$\mathbb{L} = \{(0,0); (1,1)\}$

d) $0 = 2xe^{-y} \implies x = 0$
$0 = -e^{-y}(x^2 + y^2 - 2y) \implies x^2 + y^2 - 2y = 0$

$\mathbb{L} = \{(0,0); (0,2)\}$

e) $0 = 2x - y + 9 \implies y = 2x + 9$
$0 = -x + 2y - 6 \implies x = 2y - 6$

$\mathbb{L} = \{(-4,1)\}$

KAPITEL 2

Funktionen

Definitionen

- Der Bereich, auf dem eine Abbildung $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definiert ist, heißt **Definitionsbereich** $\mathbb{D}$
- Die Bildmenge, auf die die Abbildung $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ abbildet, heißt **Wertebereich** $\mathbb{W}$
- Ordnet $f : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{W}$ jedem $x \in \mathbb{D}$ genau ein $y \in \mathbb{W}$ zu, $y = f(x)$, so ist f eine **Funktion**
- Die Punktmenge $(x; f(x)) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \in \mathbb{D}$ heißt **Graph** der Funktion f

Typische Einschränkungen des Definitionsbereiches

- Nennernullstellen
- Radikand einer geraden Wurzel ≥ 0
- Argument des Logarithmus > 0

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich folgender Funktionen an

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1} \implies \mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 15} \implies \mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-3; -5\}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x^2-1)(x+1)} \implies$
$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0; \pm 1\}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \implies \mathbb{D} = \{|x| \geq 1\}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} \implies$
$\sqrt{(x-3)(x+2)}$
$\mathbb{D} = [3; \infty) \cup (-\infty; -2]$

f) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2} \implies$
$\sqrt{-(x-1)(x-2)}$
$\mathbb{D} = (1; 2)$

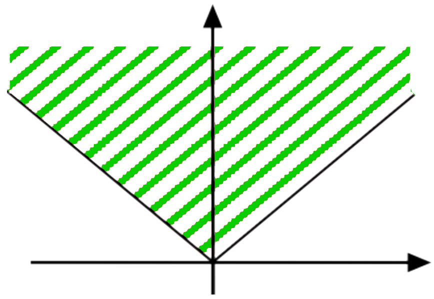
g) $f(x) = \ln(x+5) \implies \mathbb{D} = (5; \infty)$

h) $f(x) = \ln(x^2 - 9) \implies \mathbb{D} = |x| > 3$

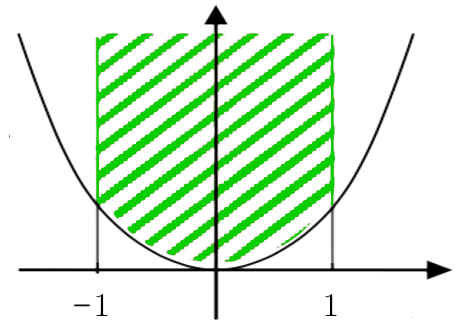
i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln^2(x) - 1}} \implies$
$\mathbb{D} = \left(0; \frac{1}{e}\right) \cup (e; \infty)$

Geben Sie den durch nachfolgende Beschränkungen definierten Bereich im $\mathbb{R}^2$ an

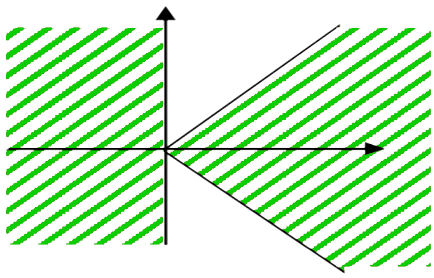
a) $y > |x|$ für $x \in \mathbb{R}$



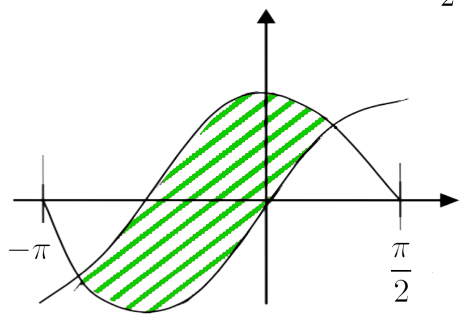
b) $y > x^2$ für $-1 \leq x \leq 1$



c) $\dfrac{|y|}{x} < 1$



d) $\sin(x) < y < \cos(x)$ für $-\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$



Darstellungen

- **explizite Darstellung:** $\boldsymbol{y = f(x)}$
  Bsp.: $y = \sin(x)$
- **implizite Darstellung:** $\boldsymbol{F(x,y) = 0}$
  Bsp.: $y - \sin(x) = 0$; $y^3 - 3y^2 + 3y - x = 0$
  Bemerkung: Nicht jede implizite Darstellung einer Funktion kann in eine explizite umgeformt werden
- **Parameterdarstellung:** $x = x(t)$; $y = y(t)$
  Bsp.: $x(t) = 2t$; $y(t) = \sin(t)$

Geben Sie die Funktion $f(x) = 2x + 1$ in Parameterdarstellung an

a) $x(t) = t$; $y(t) = 2t + 1$

b) $x(t) = 2t - 1$; $y(t) = 4t - 1$

c) $x(t) = t^3 - 1$; $y(t) = 2t^3 - 1$

d) $y(t) = \dfrac{t}{2} + 1$; $x(t) = \dfrac{t}{4}$

e) $y(t) = 4t^3$; $x(t) = 2t^3 - \dfrac{1}{2}$

f) $y(t) = t + 1$; $x(t) = \dfrac{t}{2}$

Geben Sie die nachfolgenden Funktionen in expliziter Darstellung an

a) $F(x,y) = y - 3x^2 = 0 \implies y = 3x^2$

b) $F(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 = 0 \implies y = -x$

c) $F(x,y) = x^2 - y^3 = 0 \implies y = \sqrt[3]{x^2}$

d) $F(x,y) = \ln(y) - 2x\ln(x) = 0 \implies y = x^{2x}$

e) $x(t) = t + 2;\; y(t) = 5 - \frac{t^2}{2} \implies y = 5 - \frac{(x-2)^2}{2}$

f) $x(t) = 2t + 2;\; y(t) = t + 2 \implies y = \frac{x-2}{2} + 2$

g) $x(t) = t^2 - 2;\; y(t) = 0.5t^2 \implies y = 0.5(x+2) = 0.5x + 1$

h) $x(t) = t - 1;\; y(t) = t^3 - 1 \implies y = (x+1)^3 - 1$

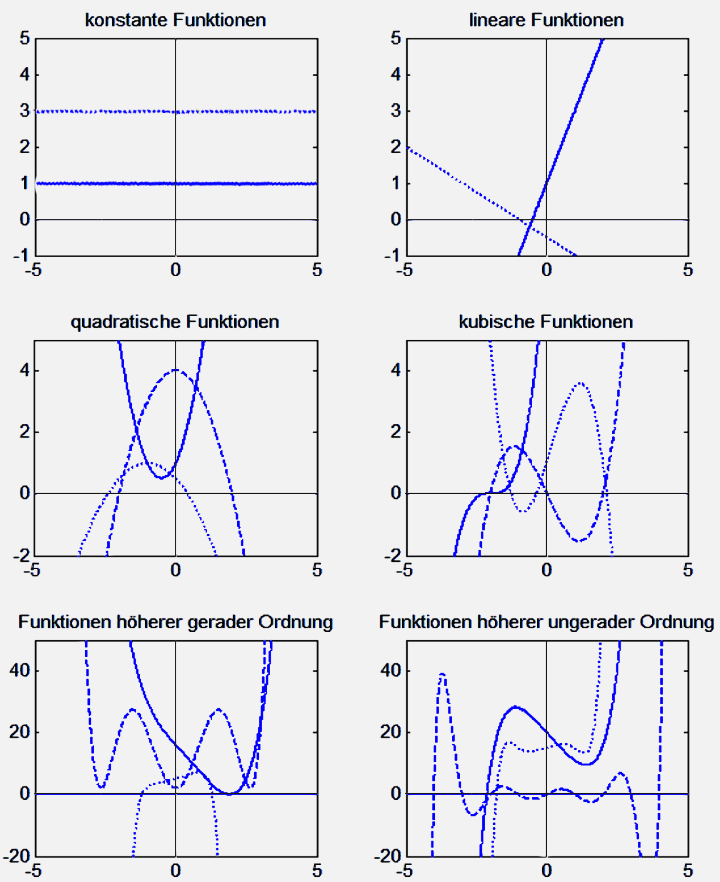
i) $x(t) = \sqrt{t};\; y(t) = t^3 \implies y = x^6$

j) $x(y) = \frac{1}{2y+2};\; z(y) = 4y - 1 \implies y = 4\left(\frac{1}{2x} - 1\right) - 1 = \frac{2}{x} - 5$

2.1 Elementare Funktionen

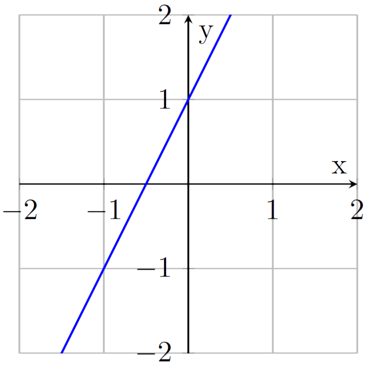
Ganz rationale Funktionen (Polynomfunktionen)

$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ist ein Polynom n-ter Ordnung, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

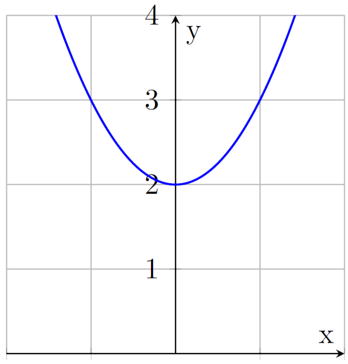


Skizzieren Sie die Graphen nachfolgender Funktionen

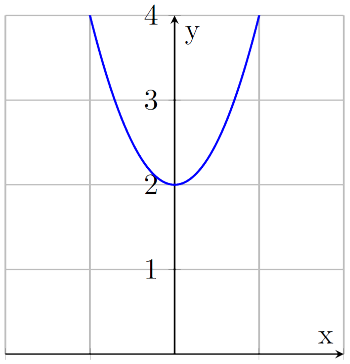
a) $f(x) = 2x + 1$



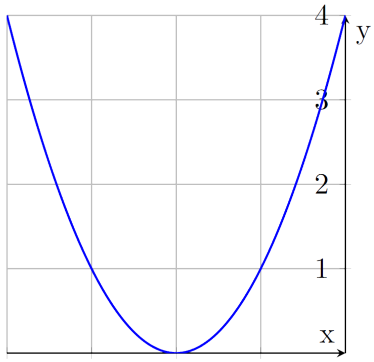
b) $f(x) = x^2 + 2$



c) $f(x) = 2x^2 + 2$



d) $f(x) = (x + 2)^2$



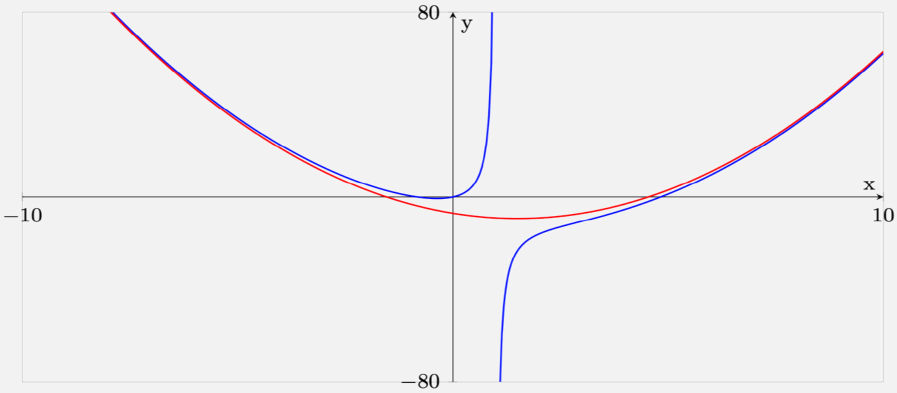
Gebrochen rationale Funktionen sind als Bruch zweier Polynome darstellbar:

$f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n}$ ist ein Polynom n-ter Ordnung, $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus$ Nennernullstellen

An den Stellen der Nennernullstellen befindet sich entweder ein Pol oder eine hebbare Lücke von $f(x)$

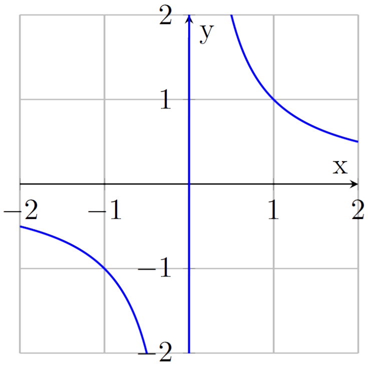
Für $|x| \to \infty$ nähert sich f einem Polynom (Asymptote)

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 - 4x}{x - 1}$

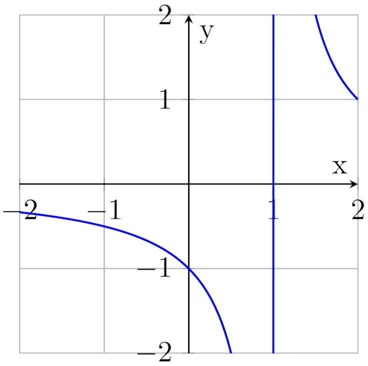


Skizzieren Sie die Graphen nachfolgender Funktionen

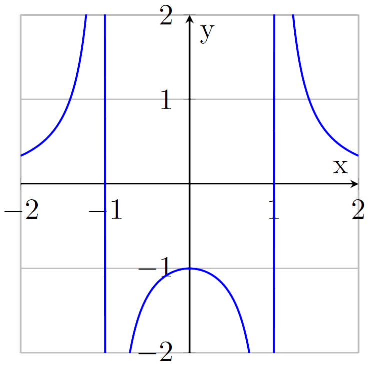
a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$



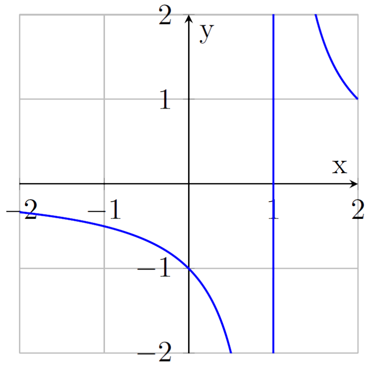
b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$



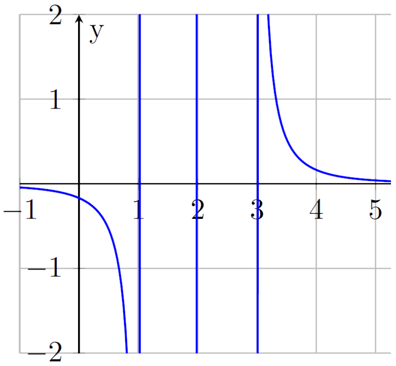
c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$



d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$



e) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$



Die **Polynomdivision** dividiert ein Polynom durch ein vom Grade kleineres Polynom, mit dem Ergebnis eines Polynoms und einer echt gebrochen rationalen Funktion.

$$(5x^3 + 3x + 1) : x^2 - 1 = 5x + \frac{8x+1}{x^2-1}$$
$$-(5x^3 - 5x)$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
8x+1

Führen Sie folgende Polynomdivision durch

a) $(x^4 - 2x^3 - 7x + 14) : (x - 2) \implies$

$$\begin{array}{l} \big(x^4 - 2x^3 - 7x + 14\big) \operatorname{div} \big(x - 2\big) = x^3 - 7 \\ \underline{-x^4 + 2x^3} \\ \qquad\qquad -7x + 14 \\ \qquad\qquad \underline{7x - 14} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

b) $(x^3 - x^2 - x + 1) : (x + 1) \implies$

$$\begin{array}{l} \big(x^3 - x^2 - x + 1\big) \operatorname{div} \big(x + 1\big) = x^2 - 2x + 1 \\ \underline{-x^3 - x^2} \\ \quad -2x^2 - x \\ \quad \underline{2x^2 + 2x} \\ \qquad\qquad x + 1 \\ \qquad\qquad \underline{-x - 1} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

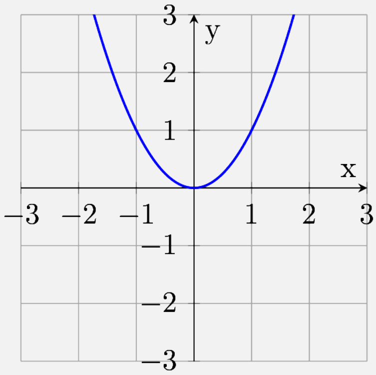
c) $(2x^5 + x^4 - 10x^3 + 4x - 1) : (x^2 + 2x - 1) \implies$

$$\begin{array}{l} \big(2x^5 + x^4 - 10x^3 + 4x - 1\big) \operatorname{div} \big(x^2 + 2x - 1\big) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1 \\ \underline{-2x^5 - 4x^4 + 2x^3} \\ \quad -3x^4 - 8x^3 \\ \quad \underline{3x^4 + 6x^3 - 3x^2} \\ \qquad\quad -2x^3 - 3x^2 + 4x \\ \qquad\quad \underline{2x^3 + 4x^2 - 2x} \\ \qquad\qquad\qquad x^2 + 2x - 1 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{-x^2 - 2x + 1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

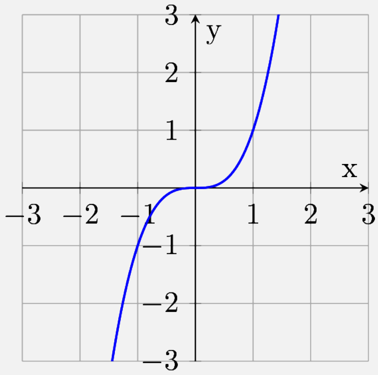
Potenzfunktionen sind alle Funktionen der Form $f(x) = ax^r$ mit $a, r \in \mathbb{R}$

Beispiele:

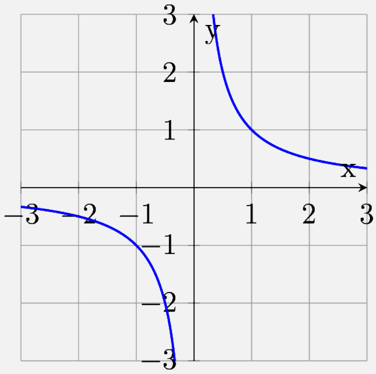
$f(x) = x^2$



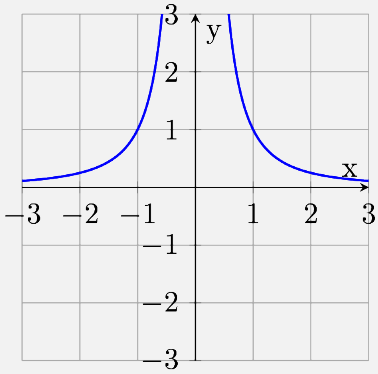
$f(x) = x^3$



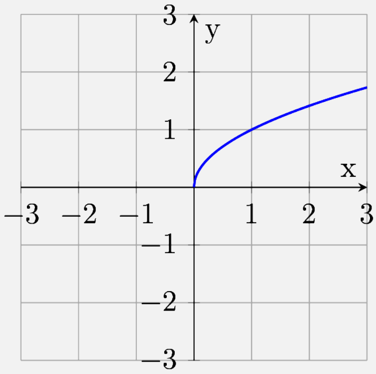
$f(x) = \dfrac{1}{x}$



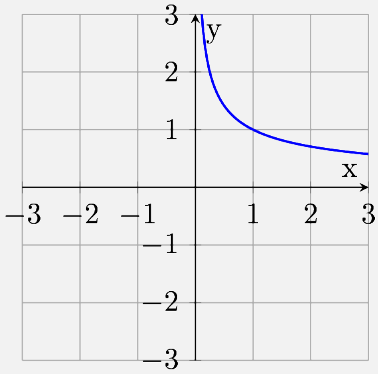
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



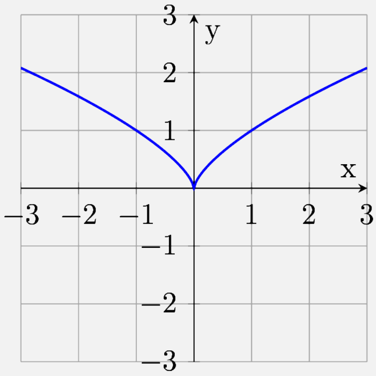
$f(x) = \sqrt{x}$



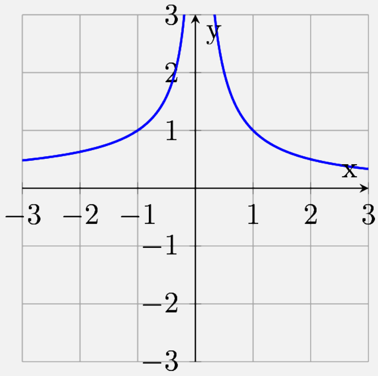
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$



$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$



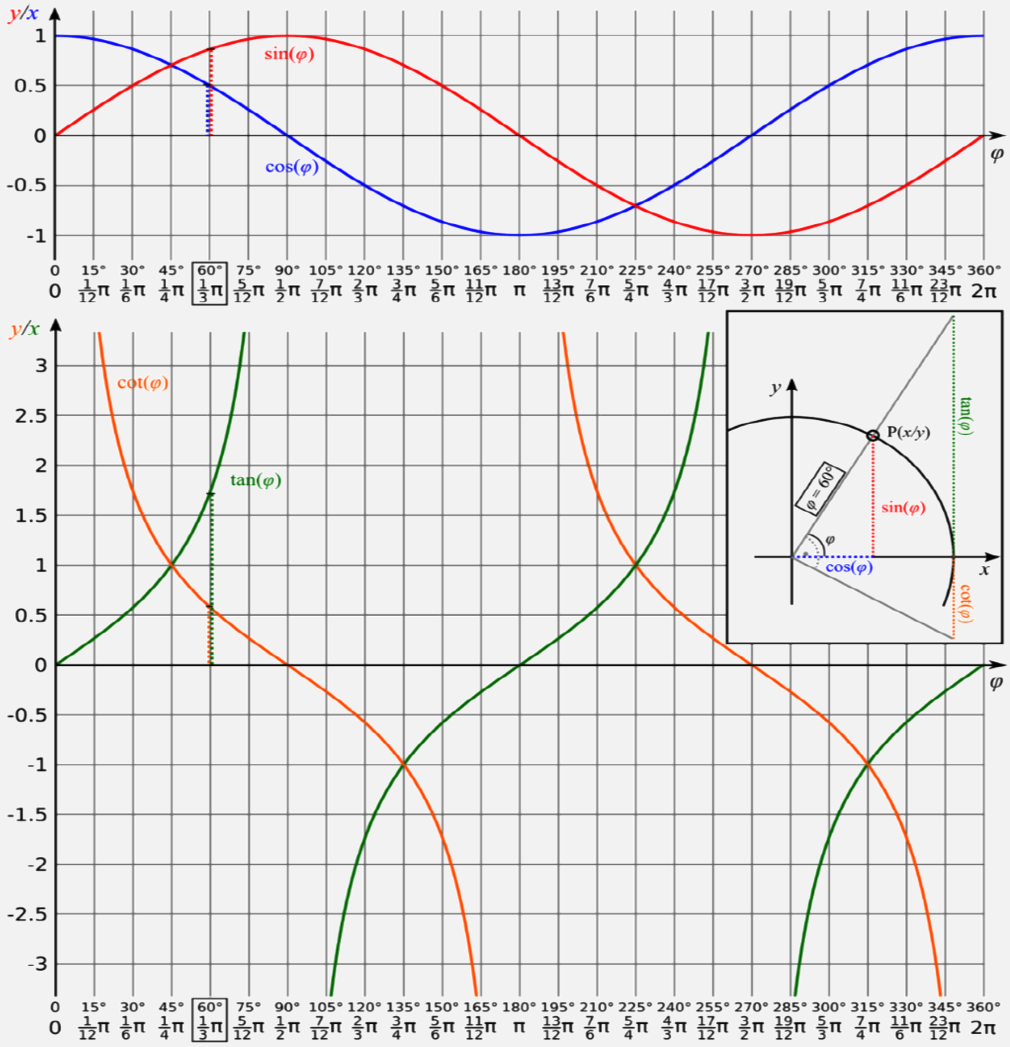
$f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$



Trigonometrische Funktionen

Die elementaren trigonometrischen Funktionen sind:

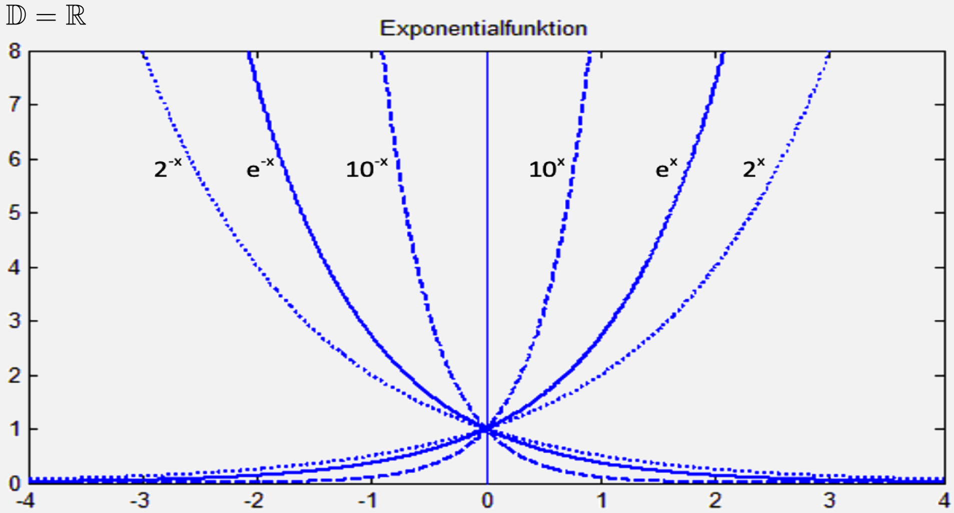
$f(x) = \sin(x); f(x) = \cos(x); f(x) = \tan(x); f(x) = \cot(x)$



Exponentialfunktionen

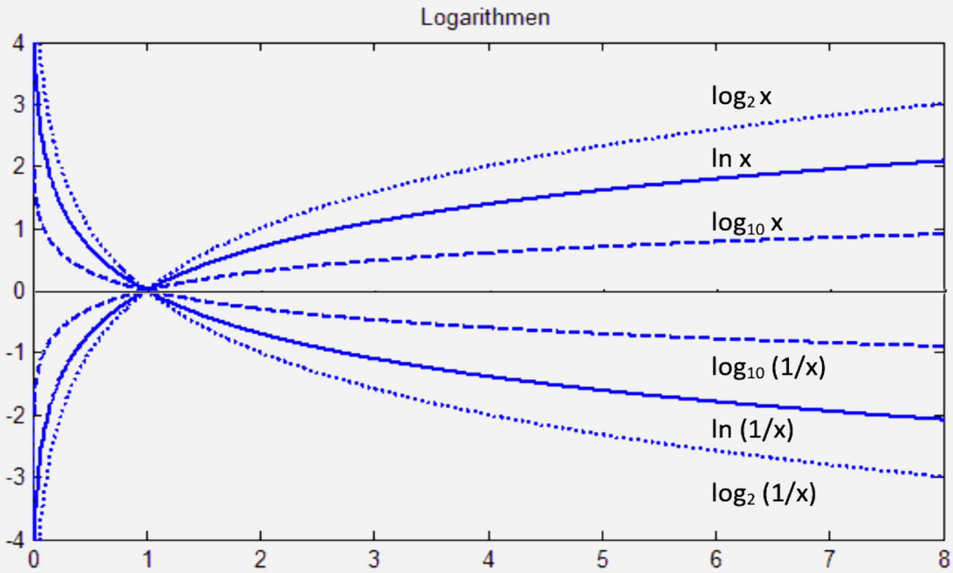
Exponentialfunktionen sind alle Funktionen der Form $f(x) = ax$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$



Logarithmusfunktionen

Logarithmusfunktionen sind alle Funktionen der Form $f(x) = \log b(x)$ mit $b > 0$
$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$



2.2 Eigenschaften

Monotonie

$f(x)$ heißt monoton wachsend: $\iff$ $f(x_1) \leq f(x_2)\ \forall\ x_1 < x_2 \in \mathbb{D}$
$f(x)$ heißt streng monoton wachsend: $\iff$ $f(x_1) < f(x_2)\ \forall\ x1 < x2 \in \mathbb{D}$
$f(x)$ heißt monoton fallend: $\iff$ $f(x_1) \geq f(x2)\ \forall\ x_1 < x_2 \in \mathbb{D}$
$f(x)$ heißt streng monoton fallend: $\iff$ $f(x_1) > f(x2)\ \forall\ x_1 < x_2 \in \mathbb{D}$

Beschränktheit

$f(x)$ heißt beschränkt: $\exists$ eine Schranke $M > 0$ mit $|f(x)| \leq M\ \forall\ x \in \mathbb{D}$

Symmetrie

Ist der Definitionsbereich symmetrisch um 0 verteilt, so gilt:
$f(x)$ ist punktsymmetrisch (zu 0) $f(-x) = -f(x)$
$f(x)$ ist punktsymmetrisch (zur y-Achse) $f(-x) = f(x)$

Periodizität

Eine Funktion $f(x)$ ist periodisch mit Periodenlänge T :
$\iff$ $f(x) = f(x+T)\ \forall\ x \in \mathbb{D}$

Verifizieren Sie, dass die Funktion $f(x) = x^3$ streng monoton wächst

Sei $x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Longrightarrow f$ ist streng monoton wachsend

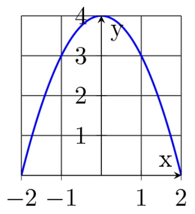
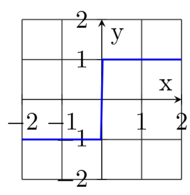
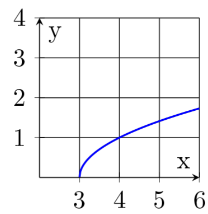
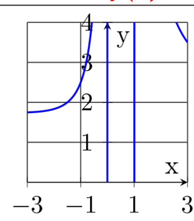
Geben Sie von den Funktionen $f(x) = 2x + 2$; $g(x) = e^x$; $h(x) = x^3 - 1$ jeweils folgende Funktionsgleichungen an

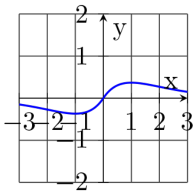
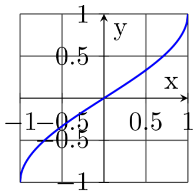
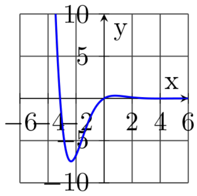
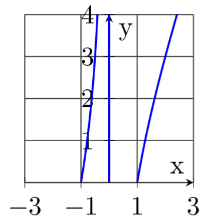
	a) an der x-Achse gespiegelt	b) an der y-Achse gesiegelt	c) am Ursprung gespiegelt
	$f(x) = -f(x)$	$f(x) = f(-x)$	$-f(x) = f(-x)$
$f:$	$-y = 2x + 2$ $y = -2x - 2$	$y = -2x + 2$	$-y = -2x + 2$ $y = 2x - 2$
$g:$	$-y = e^x$ $y = -e^x$	$y = e^{-x}$	$-y = e^{-x}$ $y = -e^{-x}$
$h:$	$-y = x^3 - 1$ $y = -x^3 + 1$	$y = -x^3 - 1$	$-y = -x^3 - 1$ $y = x^3 + 1$

2.3 Nullstellen

Stellen x aus dem Definitionsbereich von f heissen **Nullstellen** von $f : \iff f(x) = 0$

Geben Sie für die nachfolgenden Funktionen den Definitionsbereich und den Wertebereich an. Untersuchen Sie auf Symmetrie, Beschränkung, Periodizität, Nullstellen und Polstellen

	$f(x) = 4 - x^2$	$f(x) = \frac{x}{\lvert x \rvert}$	$f(x) = \sqrt{x-3}$	$f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2-x}$
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$[3; \infty]$	$\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
$\mathbb{W}$	$(-\infty; 4]$	$\{-1; 1\}$	$[0, \infty)$	$\mathbb{R} \setminus (-13,75; 1,74)$
Symmetrie	achens.	punkts.	-	-
Beschränkung	oben	oben und unten	unten	-
Periode	-	-	-	-
Nullstellen	$x = \pm 2$	-	x=3	-
Polstellen	-	-	-	x=0; x=1
Grenzwerte	$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$	$\lim_{x\to 3} f(x) = 0$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$
Graphen				

	$f(x) = xe^{-\lvert x\rvert}$	$f(x) = \frac{2}{\pi}\arcsin(x)$	$f(x) = e^{-x}\sin(x)$	$f(x) = \frac{2x^2-2}{x}$
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	[-1;1]	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{W}$	$[-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}]$	[-1;1]	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Symmetrie	punkts.	punkts.	-	punkts.
Beschränkung	oben und unten	oben und unten	-	-
Periode	-	-	-	-
Nullstellen	$x = 0$	x=0	$x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$	x=±1
Polstellen	-	-	-	x=0
Grenzwerte	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ $\lim_{x\to-1} f(x) = -1$	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) -$	$\lim_{x\to\infty} = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$
Graphen				

Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen

a) $f(x) = 2 - e^{-x} = 0 \implies 2 = e^{-x} \implies e^{x} = \frac{1}{2} \implies x = -\ln(2)$

b) $f(x) = 10\lg\left(\frac{a}{x^2}\right) = 0 \implies \frac{a}{x^2} = 1 \implies x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$ mit $a > 0$

c) $f(x) = a^{2x-1} - e^{-x} = 0 \implies a^{2x-1} = e^{-x} \implies (2x-1)\ln(a) = -x \implies$
$2x\ln(a) + x = \ln(a) \implies$

$$x = \frac{\ln(a)}{2\ln(a)+1} \text{ für } a > 0 \text{ und } 2\ln(a) \neq -1$$

d) $f(x) = xe^{x} + x\ln(a) = 0 \implies x(e^{x}+\ln(a)) = 0 \implies x_1 = 0;\ x_2 = -\ln\big(\ln(a)\big)$ für $a \neq 0{,}1$

e) $f(x) = 50 - 10\ln(x) = 0 \implies \ln(x) = 5 \implies x = e^{5}$

f) $f(x) = \ln(x) - e^{x} = 0 \implies \ln(x) = e^{x} \implies$ es gibt keine Nullstelle

Die Nullstellen von Polynomfunktionen bestimmt man i.a. bei

- Polynome 2. Grades durch die *abc*-Formel
- Polynomen n. Grades mit $n > 2$ durch Erraten einer Lösung x_1 und anschließender Polynomdivision durch den entsprechenden Linearfaktor $(x - x_1)$. Wiederholung des Verfahrens bis zum Restpolynom vom 2. Grad

Bestimmen Sie alle Nullstellen folgender Polynome

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$. Eine Nullstelle liegt bei $x = 2$

$$\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 - 4x^2 + 6x - 4\right) \text{ div } \left(x - 2\right) = x^2 - 2x + 2 \\
\underline{-\,x^3 + 2x^2} \\
\qquad -\,2x^2 + 6x \\
\qquad \underline{\;\;2x^2 - 4x} \\
\qquad\qquad\quad 2x - 4 \\
\qquad\qquad \underline{-\,2x + 4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
\qquad \Longrightarrow x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \notin \mathbb{R}$$

b) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

$$\Longrightarrow \; x_1 = 0;\; x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = -3; 2$$

c) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x \Longrightarrow \; x_1 = 0;\; x_2 = 1 \; \Longrightarrow$

$$\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 + 2x^2 \;\; - x - 2\right) \text{ div } \left(x - 1\right) = x^2 + 3x + 2 \\
\underline{-\,x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad\quad 3x^2 \;\; - x \\
\qquad \underline{-\,3x^2 + 3x} \\
\qquad\qquad\quad 2x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{-\,2x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
\qquad \Longrightarrow x_{3,4} = \frac{-3\sqrt{9-8}}{2} = -1; -2$$

Zerlegen Sie die Polynome in Linearfaktoren

a) $f(x) = 4 - x^2 \;=\; (2 - x)(2 + x)$

b) $f(x) = 3x^2 + 3x - 90 \;=\; 3(x - 5)(x + 6)$

$$x^2 + x - 30 = 0 \;\Longrightarrow\; x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = 5; -6$$

c) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 \;=\; (x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

$x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0 \implies x_1 = 1$

$$\begin{array}{l}
\big(\;x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6\big) \operatorname{div} \big(x - 1\big) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \Rightarrow x_2 = -1 \\
\underline{-\,x^4 + x^3} \\
\quad 6x^3 + 5x^2 \\
\quad \underline{-\,6x^3 + 6x^2} \\
\qquad 11x^2 - 5x \\
\qquad \underline{-\,11x^2 + 11x} \\
\qquad\quad 6x - 6 \\
\qquad\quad \underline{-\,6x + 6} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\big(\;x^3 + 6x^2 + 11x + 6\big) \operatorname{div} \big(x + 1\big) = x^2 + 5x + 6 \\
\underline{-\,x^3 - x^2} \\
\quad 5x^2 + 11x \\
\quad \underline{-\,5x^2 - 5x} \\
\qquad 6x + 6 \\
\qquad \underline{-\,6x - 6} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow x_{3,4} = \frac{-5\sqrt{25-24}}{2} = -2; -3$$

2.4 Stetigkeit

Grenzwerte

Unter dem Grenzwert $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ versteht man den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ für jede Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$, wobei gilt $x_n \neq p$ gilt.

p muss nicht im Definitionsbereich von f liegen, zudem kann $p = -\infty$ oder $p = \infty$ sein.

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$ existiert nicht

b) $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{1}{1-x} \;=\; -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{1}{1-x} \;=\; \infty$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-1}{1+2x} \;=\; 2$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{1-x^2} \;=\; -2$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{3x^2+x+2} \;=\; 0$

Stetigkeit

- f heißt punktweise stetig an $x_0 \in \mathbb{D} :\iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f heißt stetig: $\iff$ f ist an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ stetig
- Alle im Kapitel *Elementare Funktionen* beschriebenen Funktionen sind stetig!

Geben Sie ein Beispiel einer unstetigen Funktion an

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

2.5 Umkehrfunktion

umkehrbare Funktionen

- Eine Funktion ist **umkehrbar**, wenn zu jedem Funktionswert genau ein Argument gehört
- Streng monotone Funktionen sind umkehrbar
- Die Umkehrfunktion (in impliziter Darstellung) einer umkehrbaren Funktion $y = f(x)$ ergibt sich durch Vertauschen von x mit $y : x = f(y)$
- Meist wird, falls möglich, die Umkehrfunktion in explizite Darstellung umgeformt: $y = f^{-1}(x)$

Geben Sie für einen geeigneten Definitionsbereich eine explizite Umkehrfunktion folgender Funktionen an

a) $f(x) = e^{2x^2+1}$ mit $\mathbb{D} = [0; \infty)$

$$x = e^{2y^2+1} \implies 2y^2 + 1 \implies \ln(x) \implies y = \sqrt{\frac{\ln(x) - 1}{2}}$$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{4}{x^2}\right)$ $= \ln(4) - 2\ln(x)$ mit $\mathbb{D} = (0; \infty)$

$$x = \ln(4) - 2\ln(y) \implies \ln(y) = -\frac{x}{2} + \frac{\ln(4)}{2} \implies y = e^{-\frac{x}{2} + \frac{\ln(4)}{2}} = 2\frac{1}{\sqrt{e^x}}$$

c) $f(x) = \sin(x + \varphi)$ mit $\mathbb{D} = \left[-\varphi - \frac{\pi}{2}; -\varphi + \frac{\pi}{2}\right]$

$$x = \sin(y + \varphi) \Leftrightarrow \arcsin(x) = y + \varphi \implies y = \arcsin(x) - \varphi$$

d) $f(x) = 1 - e^{-ax}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$x = 1 - e^{-ay} \implies e^{-ay} = 1 - x \implies -ay = \ln(1-x) \implies y = -\frac{\ln(1-x)}{a}$$

e) $f(x) = x^3$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$x = y^3 \implies y = \sqrt[3]{x}$$

f) $f(x) = x^7$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$x = y^7 \implies y = \sqrt[7]{x}$$

Tabelle mit Funktionen $f(x)$ und ihren Umkehrfunktionen $f^{-1}(x)$

$f(x) =$		$f^{-1}(x) =$	
x	mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$	mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{\emptyset\}$
$x^n \ \big(n \in \mathbb{N}\big)$	mit $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$	$\sqrt[n]{x}$	mit $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$\ln(x)$	mit $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	e^x	mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\sin(x)$	mit $\mathbb{D} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\arcsin(x)$	mit $\mathbb{D} = [-1{,}1]$
$\cos(x)$	mit $\mathbb{D} = [0{,}\pi]$	$\arccos(x)$	mit $\mathbb{D} = [-1{,}1]$
$\tan(x)$	mit $\mathbb{D} = \left[-\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\arctan(x)$	mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\tan(x)$	mit $\mathbb{D} = [0{,}\pi]$	$\text{arccot}(x)$	mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

2.6 Anspruchsvolle Aufgaben

Newton

Ein Apfel der Masse m fällt durch die Erdbeschleunigung g vom Baum aus der Höhe H nach unten. Dabei bleibt stets seine Energie erhalten: $E = mgh + \frac{1}{2}mv^2(h) = mgH$.
h ist die vertikale Koordinate, v die Geschwindigkeit.

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit $v(h)$ betragsmäßig?

$$v^2(h) = g2(H-h) \implies |v(h)| = \sqrt{g2(H-h)}$$

b) Die Geschwindigkeit v und die Höhe h hängen dabei von der Zeit t ab.
Geben Sie $h(t)$ an, wenn $v(t) = -gt$.

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H$$

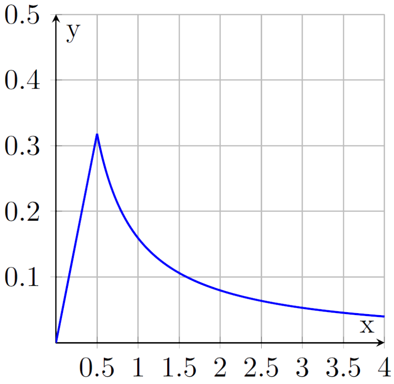
Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters

Das Magnetfeld H eines vom Strom $I = 1$ A durchflossenen geraden Leiters vom Radius $R = 0.5$ mm ist im Abstand r von seiner Mitte:

$$H = \begin{cases} \dfrac{Ir}{2\pi R^2} & \text{für } r \leq R \\[2ex] \dfrac{I}{2\pi} & \text{für } r \geq R \end{cases}$$

$$H = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \cdot r & \text{für } r \leq 0.5 \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} \cdot \dfrac{1}{r} & \text{für } r \geq 0.5 \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Graphen:



Schallpegel

Der Schallpegel ist $L = 10\lg\left(\dfrac{J}{J_0}\right)$ dB mit $J_0 = 10^{-12}$ Watt/m^2.

Wie viele Schallquellen mit $L = 10$ dB muss man nebeneinanderstellen (aufaddieren) um die Schmerzgrenze von $L = 130$ dB zu erreichen?

$L = 130$ dB$= 10{\cdot}10\lg\left(\dfrac{nJ_0}{J_0}\right) = 10\lg(n) \implies \lg(n) = 13 \implies n = 10^{13}$

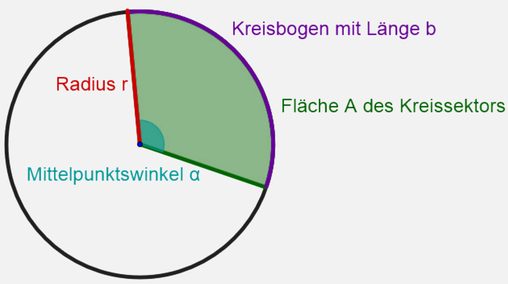
KAPITEL 3

Trigonometrie

3.1 Gradmaß und Bogenmaß

Größen bei Kreis und Kugel

Kreisumfang	$U = 2\pi r$
Kreisbogen mit Bogenmaß	$b = ar$
Kreisfläche	$A = \pi r^2$
Kreissektorfläche	$A_s = \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$
Kugeloberfläche	$A = 4\pi r^2$
Kugelvolumen	$V = \dfrac{4\pi}{3} r^3$



Aufgaben zu Kreis und Kugel

a) Bestimmen Sie die Sektorfläche eines Kreises mit Radius $r = 3$ und $\alpha = 45°$

$$F = 9\pi \cdot \frac{45}{360} = 9\pi \cdot \frac{1}{8} \approx 3.53 \text{ FE}$$

b) Bestimmen Sie die Sektorfläche eines Kreises mit Radius $r = 2$ und $\alpha = 90°$

$$F = 4\pi \cdot \frac{90}{360} = 4\pi \cdot \frac{1}{4} \approx 3.142 \text{ FE}$$

c) Bestimmen Sie die Bogenlänge eines Kreisauschnittes mit $r = 4$ und $\alpha = 60°$

$$L = 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{60}{360} = 8\pi\frac{1}{6} \approx 4.2 \text{ LE}$$

d) Geben Sie das Volumen einer Halbkugel mit Radius $r = 4$ an

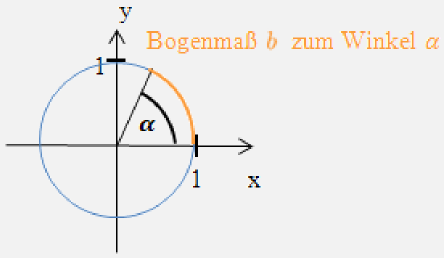
$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2 \cdot 64}{3}\pi \approx 134 \text{ VE}$$

e) Geben Sie die Fläche der oberen Halbkugel mit $r = 4$ an (ohne Grundfläche)

$$F = 2\pi r^2 = 32\pi \approx 100.53 \text{ FE}$$

Beim **Bogenmaß** wird der Winkel durch die Länge des entsprechenden Kreisbogens im Einheitskreis angegeben

Bogenmaß		Gradmaß
2π	$\widehat{=}$	$360°$
b	$\widehat{=}$	$\left(\frac{b}{2\pi} \cdot 360\right)^{\circ}$
$2\pi \cdot \frac{\alpha}{360}$	$\widehat{=}$	$\alpha°$



Vervollständigen Sie die folgende Tabelle

Gradmaß	1°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	210°	12°	360°
Bogenmaß	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{15}$	2π

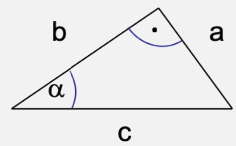
3.2 Winkelfunktionen

Beim Die vier trigonometrischen Funktionen sind zunächst nur im rechtwinkligen Dreieck für Winkel zwischen 0° und 90° definiert.

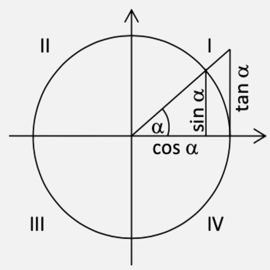
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

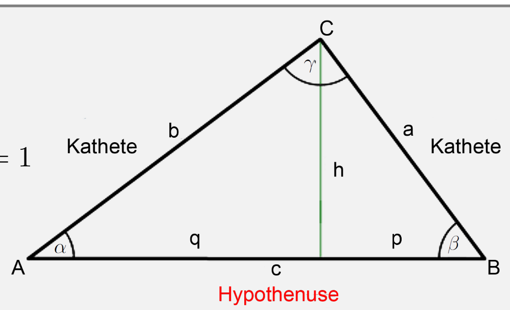


Unter Verwendung des **Einheitskreises** werden die Winkelfunktionen auf beliebige Winkel ausgeweitet.



Satzgruppe des Pythagoras:

Satz des Pytagoras=	$a^2 + b^2 = c^2$
	$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
Kathetensatz des Euklid	$a^2 = pc;\ b^2 = qc$
Höhensatz des Euklid	$h^2 = pq$



Bemerkung: Die hier beschriebenen Bezeichnungen am Dreieck, haben sich etabliert und die nachfolgenden Aufgaben nehmen entsprechend hierauf Bezug.

Flächenberechnung des Dreiecks:
Die Fläche eines allgemeinen Dreiecks ist

$$A = \frac{aH_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

Dabei zeigt der Index die Höhe an, die auf der entsprechenden Seite senkrecht steht.
Beim rechtwinkligen Dreieck ist mit den Katheten a und b die Fläche

$$A = \frac{ab}{2}$$

Aufgaben im rechtwinkligen Dreieck

a) Gegeben ist a=6 cm; c=10 cm. Berechnen Sie die restlichen Längen b, p, q, h

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$
$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{36}{10} = 3.6;\ q = \frac{b^2}{c} = \frac{64}{10} = 6.4$$
$$h^2 = pq = 3.6 \cdot 6.4 = 23.04 \implies h = 4.8$$

b) Wie groß ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit $a = 2;\ b = 1$?

$$F = ab \cdot \frac{1}{2} = 1$$

c) Wie groß ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit $a = 2;\ c = 3$?

$$F = ab \cdot \frac{1}{2} = a\sqrt{c^2 - a^2} \cdot \frac{1}{2} \approx 2.24$$

d) Wie groß ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit $\alpha = 30°;\ c = 3$?

$$F = \frac{1}{2} \cdot c{\cdot}\cos(30°) \cdot c{\cdot}\sin(30°) = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \approx 1.95$$

e) Wie groß ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit $\alpha = 45°;\ b = 1$?

$$F = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b{\cdot}\tan(\alpha) = 0.5$$

f) Wie groß ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit $b = 1;\ c = 3$?

$$F = \frac{1}{2}b \cdot \sqrt{c^2 - b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8} \approx 1.41$$

g) Wie groß ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit $\beta = 20°;\ a = 2$?

$$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a{\cdot}\tan(\beta) = 2\tan(20°) \approx 0.728$$

Anwendungsaufgaben

a) Wie lang ist der Schatten eines senkrecht auf einer Ebene stehenden Stabs der Länge $h = 2$ m, wenn die Sonnenhöhe (= Winkel der Sonnenstrahlen gegen die Horizontale) $\alpha = 37.5°$ beträgt?

$\tan(37.5°) = \frac{h}{l} \implies l = \frac{h}{\tan(37.5°)} \approx 2.6$ m

b) Welchen Winkel bildet in einem Würfel die Raumdiagonale mit den Grundflächen?

$\tan(\alpha) = \frac{h}{h\sqrt{2}} \implies \alpha \approx 35.3°$

c) Wie groß ist der Böschungswinkel eines kegelförmigen Sandhaufens mit den Seitenlinie 1.8 m und Grundkreisdurchmesser 2.9 m?

$\cos(\alpha) = \frac{1.45}{1.8} = 0.805 \implies \alpha \approx 36.3°$

d) Auf einem Lochkreis von 200 mm Durchmesser sollen 9 gleichmäßig verteilte Bohrlöcher angerissen werden. Welchen Abstand a haben die Mittelpunkte der Bohrlöcher?

Der Winkel zwischen der Bohrlöchern beträgt: $\alpha = \frac{360°}{9} = 40°$

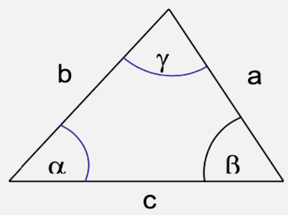
Abstand zwischen Bohrlöschern: $a = 2 \cdot \frac{200}{2} \cdot \sin\left(\frac{40°}{2}\right) = 86.4$ mm

Sinus- und Cosinussatz im beliebigen Dreieck:

Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Sinussatz
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$
$$\frac{b}{c} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$
$$\frac{c}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$$

Cosinussatz
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$



Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel des Dreiecks ABC

a) $a = 7$ cm; $b = 5$ cm und $c = 8$ cm.

$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 64 - 49}{80} = 0.5 \implies \alpha = 60°$

$\cos(\beta) = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{64 + 49 - 25}{112} = 0.7857 \implies \beta = 38°$

$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 25 - 64}{70} = 0.143 \implies \gamma = 82°$

b) $\alpha = 60°$; $\beta = 60°$; $a = 1$

$\gamma = 180° - 60° - 60° = 60°$

$b = c = 1$

c) $a = 1;\ b = 1;\ \gamma = 90°$
$c^2 = a^2 + b^2 2ab\cos(\gamma) = 1 + 1 - 2 \cdot 0 = 2 \implies c = \sqrt{2}$
$\alpha = \beta = 45°$

d) $\alpha = 30°;\ \beta = 45°;\ a = 1$
$\gamma = 180° - 75° = 105°$
$b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(45°)}{\sin(30°)} = \sqrt{2};\quad c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha)} = 2 \cdot 0.966 = 1.966$

Anwendungsaufgabe

Wie groß sind der Flächeninhalt und die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn die Höhe h und der Winkel γ bekannt sind.

$\alpha = \beta = \frac{180° - \gamma}{2}$
$\tan(\alpha) = \frac{2h}{b} \implies b = \frac{2h}{\tan(\alpha)}$
$F = \frac{b}{2} \cdot h = \frac{h^2}{\tan(\alpha)}$

Additionstheoreme:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Aufgaben zum doppelten Winkel

a) Geben Sie eine Berechnungsformel für $\sin(2x)$ an

$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

b) Geben Sie eine Berechnungsformel für $\cos(2x)$ an

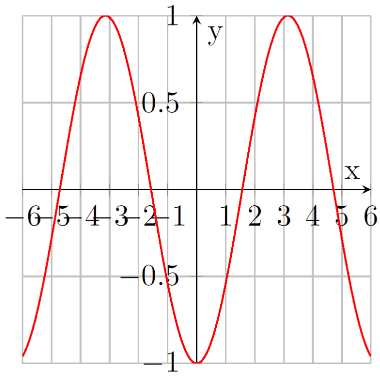
$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Verschiebungsformeln:

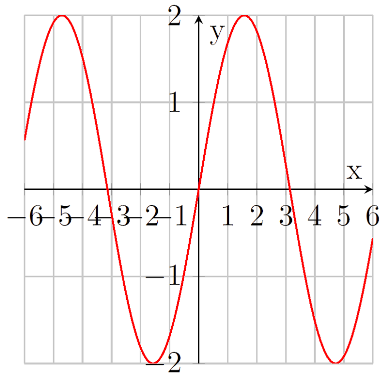
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ $\qquad$ $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ $\qquad$ $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

Skizzieren Sie folgende Funktionen

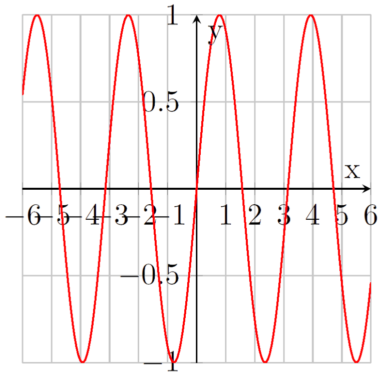
a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



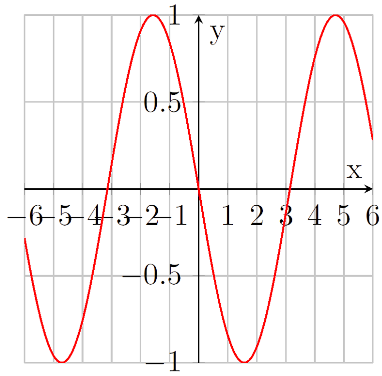
b) $f(x) = 2\sin(x)$



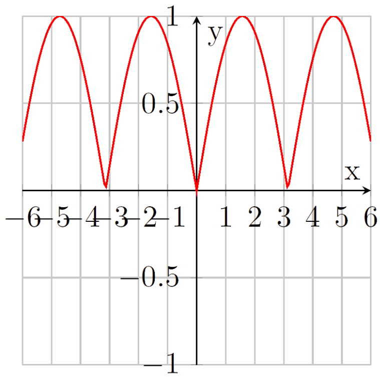
c) $f(x) = \sin(2x)$



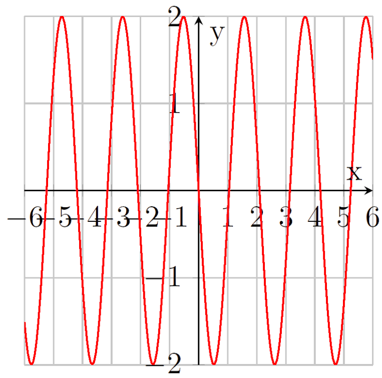
d) $f(x) = -\sin(x)$



e) $f(x) = |\sin(x)|$



f) $f(x) = 2\sin(3x + \pi)$



Vereinfachen Sie folgende Terme

a) $\sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = \sqrt{1} = 1$

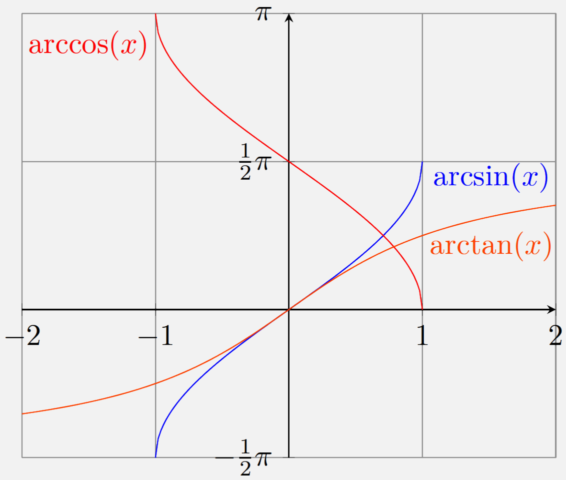
b) $\cos^4(x) - \sin^4(x) = \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$

c) $\cos(x)\sqrt{1 + \tan^2(x)} = \cos \cdot \sqrt{1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 1$

d) $\sin(x)\tan(x)+\cos(x)-\frac{1-\sin(2x)}{\cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}+\cos(x)-\frac{1-2\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)}$

$$= \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)-1+2\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)} = 2\sin(x)$$

3.3 Arcusfunktionen



Alle Lösungen von $\sin(x)=a$; $\cos(x)=a$; $\tan(x)=a$; $\cot(x)=a$

$\sin(x)=a$ mit $a\in[-1;1]$ $\quad x=\begin{cases}\arcsin(a)+2k\pi & \text{für } k\in\mathbb{Z}\\ \pi-\arcsin(a)+2k\pi & \text{für } k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

$\cos(x)=a$ mit $a\in[-1;1]$ $\quad x=\begin{cases}\arccos(a)+2k\pi & \text{für } k\in\mathbb{Z}\\ -\arccos(a)+2k\pi & \text{für } k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

$\tan(x)=a$ mit $a\in\mathbb{R}$ $\quad x=\arctan(a)+k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$

$\cot(x)=a$ mit $a\in\mathbb{R}$ $\quad x=\operatorname{arccot}(a)+k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$

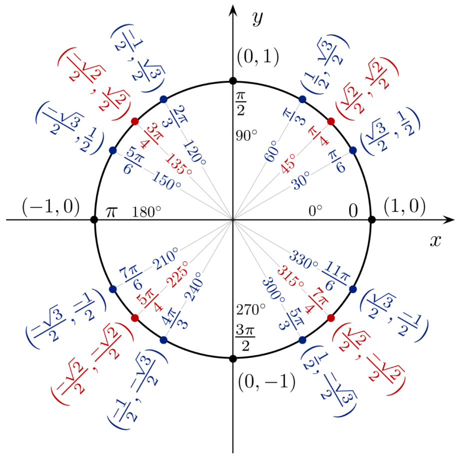
Lösen Sie das folgende Gleichungssystem

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)y=\frac{-3}{\sqrt{2}} \iff \frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y=\frac{-3}{\sqrt{2}} \iff x-y=-3$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)x+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)y=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y=-\frac{-3}{\sqrt{2}} \qquad x+y=1 \implies x=2;\ y=-1$$

Füllen Sie folgende Tabelle

$\sin(0°)$	$\sin(30°)$	$\sin(45°)$	$\sin(60°)$	$\sin(90°)$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(90°)$	$\cos(60°)$	$\cos(45°)$	$\cos(30°)$	$\cos(0°)$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1



3.4 Trigonometrische Gleichungen

Trigonometrische Gleichungen sind Gleichungen in denen trigonometrische Funktionen auftreten
Lösungsweg:

- Vereinheitlichen der Argumente
- Zurückführen in eine Gleichung für nur eine trigonometrische Funktion
- Auflösen nach dieser trigonometrischen Funktion
- Bestimmen der zugehörigen Lösungen

Geben Sie alle Lösungen folgender trigonometrischer Gleichungen an

a) $\sin(3x) = 0.5 \implies 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \implies x = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$

$$\implies 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \implies x = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

b) $\cos(2x) = 1 \implies 2x = 2k\pi \implies x = k\pi$

c) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \implies 3x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \implies x = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\implies 3x + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \implies x = \frac{1}{3}\left(\pi - \frac{\pi}{6} + 2k - \frac{\pi}{2}\right)$$

d) $\tan\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{3} \implies \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + k\pi \implies x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

e) $\tan(3x)+\cos(3x) = 0 \implies \dfrac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = -1 \implies \tan(3x) = -1$

$$\implies 3x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \implies x = \frac{1}{3}\Big(-\frac{\pi}{4} + k\pi\Big)$$

f) $2\sin^2(x) - 2\cos(x) = 2 \implies \sin^2(x)-\cos(x) = 1 \implies 1-\cos^2-\cos(x) - 1 = 0$

$$\implies \cos^2(x)+\cos(x) = 0 \implies \cos(x) = 0 \vee \cos(x) = -1$$

$$\implies x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ und } x = \pi + 2k\pi$$

g) $\sin(4x)\cdot\cot(2x) - 4\cos(2x) = 2 \implies 2\sin(2x)\cos(2x)\cdot\dfrac{\cos(2x)}{\sin(2x)} - 4\cos(2x) = 2$

$$\implies \cos^2(2x) + 2\cos(2x) - 1 = 0 \implies \text{ mit } u := \cos(2x) :$$

$$u^2 - 2u - 1 = 0 \implies u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Einzige Lösung ist: $\cos(2x) = 1 - \sqrt{2} \approx -0.414$

3.5 Anspruchsvolle Aufgaben

Gerades Straßenstück

a) Ein gerades Straßenstück der Länge $L = 320$ m steigt unter $\alpha = 7.5°$ an. Wie lang ist es auf einer Karte mit dem Maßstab 1:25 000?
Der ebene Anteil des Strassenstückes beträgt: $l = 320\cdot\cos(7.5°) \approx 317.262$

Die Länge auf der Karte ist: $\dfrac{317.262}{25000}$ m $= 1.27$ cm

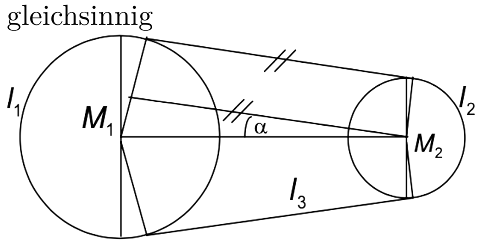
b) Ein gerades Straßenstück der Länge $L = 600$ m hat ein Gefälle von $\alpha = 12°$ Wie lang ist es auf einer Karte mit dem Maßstab 1:50 000?
Der ebene Anteil des Strassenstückes beträgt: $l = 600\cdot\cos(12°) \approx 586.889$

Die Länge auf der Karte ist: $\dfrac{586.889}{50000}$ m $= 1.174$ cm

Riemenscheiben

Zwei Riemenscheiben haben den Radius $r_1 = 35.4$ cm und $r_2 = 14.6$ cm: ihr Mittelpunktabstand beträgt $a = 1.45$ m. Wie lang muss der Riemen sein, wenn sich die Scheiben

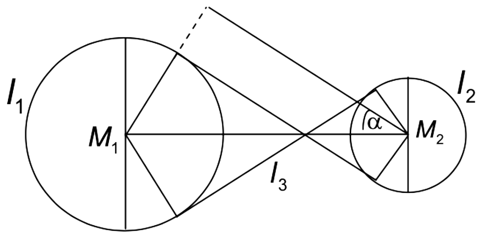
a) gleichsinnig



$\sin(\alpha) = \dfrac{r_1 - r_2}{a} = 0.1434 \implies \alpha = 8.25°$ bzw- $x = 0.1439$ rad
$l_1 = (\pi + 2x)r_1 = 121.4$ cm
$l_2 = (\pi - 2x)r_2 = 41.67$ cm
$l_3 = a{\cdot}\cos(\alpha) = 143.5$ cm

Länge des Riemens: $l = l_1 + l_2 + 2l_3 = 450.08$ cm $= 4.5$ m

b) gegensinnig drehen sollen?



$\sin(\alpha) = \dfrac{r_1 - r_2}{a} = 0.3448 \implies \alpha = 20.17°$ bzw- $x = 0.352$ rad
$l_1 = (\pi + 2x)r_1 = 136.13$ cm
$l_2 = (\pi + 2x)r_2 = 56.15$ cm
$l_3 = a{\cdot}\cos(\alpha) = 136.1$ cm

Länge des Riemens: $l = l_1 + l_2 + 2l_3 = 464.48$ cm $= 4.64$ m

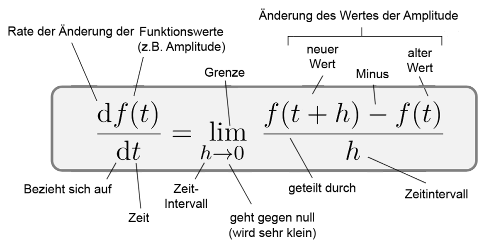
KAPITEL 4

Differential- und Integralrechnung

4.1 Definition der Differenzierbarkeit

- Die Funktion $f(x)$ heißt differenzierbar an $x_0 \in \mathbb{D}$:

  $\Longrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert.
- Diesen Grenzwert bezeichnet man als Ableitung von f an der Stelle x_0; geschrieben: $f'(x_0)$ oder $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$
- Die Funktion f heißt differenzierbar auf $\mathbb{D}$, wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar ist.



Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = x^2$ durch Grenzwertbildung des Differenzenquotienten

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$$

Überprüfen Sie, ob die Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle $x = 0$ differenzierbar ist

Grenzwert der Tangentensteigung von rechts: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h - 0}{h} = 1$

Grenzwert der Tangentensteigung von links: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0) - f(-h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0 - h}{h} = -1$

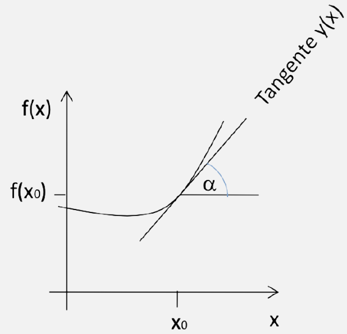
$\Longrightarrow$ f ist an $x = 0$ nicht differenzierbar

Veranschaulichung der Ableitung

- Der Graph einer differenzierbaren Funktion hat keinen "Knick"
- Die Ableitung an der Stelle x_0 entspricht der Steigung der Tangente an den Funktionsgraph.

  $\tan(\alpha) = f'(x_0)$

  Tangentengleichung:
  $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$



4.2 Ableitungsregeln für differenzierbare Funktionen

Monotonie

Regel	Funktion	Ableitung
Potenzfunktionen	$y = x^r \ (r \in \mathbb{R})$	$y' = r \cdot x^{r-1}$
Linearität	$y = a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$	$y' = a \cdot f'(x) + b \cdot g'(x)$
Produktregel	$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Kettenregel	$y = f\big(g(x)\big)$	$y' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen

a) $f(x) = 5x \implies f'(x) = 5$

b) $f(x) = 3x^2 + x \implies f'(x) = 6x + 1$

c) $f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \implies \dot{x}(t) = -gt$

d) $f(x) = x^2\sin(x) \implies f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$

e) $g(x) = (2x - 3)(x^2 + 1) \implies f'(x) = 2(x^2 + 1) + (2x - 3)2x$

f) $f(x) = \dfrac{\sin(x) + 1}{x^2 + x} \implies f'(x) = \dfrac{(x^2 + x)\cos(x) - (2x + 1)(\sin(x) + 1)}{(x^2 + x)^2}$

g) $f(x) = \sin(x^2 + 3x) \implies f'(x) = \cos(x^2 + 3x) \cdot (2x + 3)$

h) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} \implies f'(x) = \dfrac{(x^2+1)2-4x^2}{(x^2+1)^2}$

i) $h(y) = e^{y^2+1} \implies \implies h'(y) = e^{y^2+1} \cdot 2y$

j) $u(t) = u_0 e^{\delta t} \sin(\omega t + \Phi_0) \implies u'(t) = -\delta u_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \Phi_0) + u_0 \omega e^{-\delta t} \cos(\omega t + \Phi_0)$

k) $f(x) = x^4 + 2x^2 - x + 4 \implies f'(x) = 4x^3 + 4x - 1$

l) $x(t) = \sqrt{t^{-3}} \implies \dot{x}(t) = -\dfrac{3}{2}\sqrt{t^{-5}}$

m) $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-1) \implies g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$

n) $f(x) = \tan(2x^2-3) \implies f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(2x^2-3)} \cdot 4x$

o) $h(y) = 4^{-(y+2)} \implies h'(y) = -4^{-(y+2)} \ln(4)$

p) $f(x) = \dfrac{x^3-2x}{x+2} \implies f'(x) = \dfrac{(x+2)(3x^2-2)-(x^3-2x)}{(x+2)^2}$

4.3 Extremstellen

Ist f eine (geeignet) mehrfach differenzierbare Funktion, so gilt:

- $f''(x_0)$ ist die Krümmung von f an der Stelle x_0.
- Ist $f'(x_0) = 0$, dann ist x_0

ein lokales Maximum	falls $f''(x_0) < 0$
ein lokales Minimum	falls $f''(x_0) > 0$
ein Sattelpunkt	falls $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ ist

Finden Sie die lokalen Extrema folgender Funktionen

a) $f(x) = 5x^2 - 3x + 7 \implies f'(x) = 10x - 3 = 0 \implies x_0 = \dfrac{3}{10}$

Wegen $f''(x) = 10 > 0$ ist an x_0 ein lokales Minimum

b) $f(x) = xe^{-x} \implies f'(x) = (1-x)e^{-x} \implies x_0 = 1$

Wegen $f''(x) = e^{-x}(x-2)$ ist $f''(1) = -e^{-1} < 0$ und somit an $x_0 = 1$ ein lokales Maximum

c) $g(x) = \frac{\ln}{x} = \ln(x) \cdot x^{-1} \implies g'x = \frac{1-\ln(x)}{x^2} = 0 \implies \ln(x_0) = 1 \implies x_0 = e$

Wegen $g''(x) = -\frac{1}{x^3} - 2 \cdot \frac{1-\ln(x)}{x^3} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$ ist $g''(e) = -\frac{1}{e^3} < 0$ und somit $x_0 = e$ ein lokales Maximum

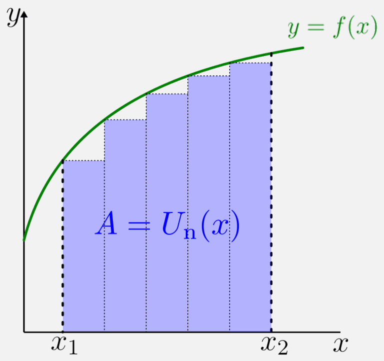
4.4 Tabelle mit Ableitungen und Stammfunktionen

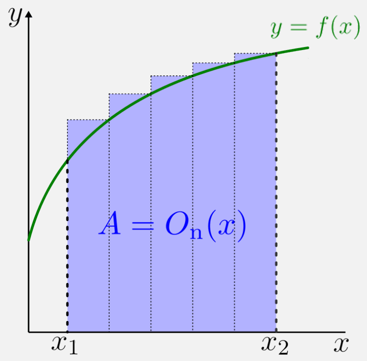
Unter einer Stammfunktion von f versteht man eine differenzierbare Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$

Ableitungsfunktion	Funktion	Stammfunktion
$y' = 0$	$y = 1$	$F(x) = x + C$
$y' = 1$	$y = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + C$
$y' = r \cdot x^{r-1}$	$y = x^r$	$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + C & \text{für } r \neq -1 \\ \ln\lvert x\rvert + C & \text{für } r = -1 \end{cases}$
$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln(x)$	$F(x) = x\ln(x) - x + C$
$y' = e^x$	$y = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$y' = a^x\ln(a)$	$y = a^x$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)}a^x + C$
$y' = \cos(x)$	$y = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
$y' = -\sin(x)$	$y = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + C$
$y' = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$y = \tan(x)$	$F(x) = -\ln\lvert\cos(\mathrm{x})\rvert + C$
$y' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$y = \cot(x)$	$F(x) = \ln\lvert\sin(\mathrm{x})\rvert + C$

4.5 Definition Integrierbarkeit

Eine Funktion f(x) heißt integrierbar $\Longrightarrow$ die Riemann Obersummen und Untersummen konvergieren gegen einen Wert aus $\mathbb{R}$ für $\Delta x \to 0$: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$





Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Begriffe:

- $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$
- Dabei heißt $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$ und $\int f(x)\mathrm{d}x$ das unbestimmte Integral
- $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ heißt das bestimmte Integral über $f(x)$.

4.6 Integrationsregeln

Beschreibung	Regel
Linearität	$\int (af(x) + bg(x))\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x + b\int g(x)\mathrm{d}x$
partielle Integration	$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$
Substitution	$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = \int f(t)\mathrm{d}t$ mit $t = g(x)$

Geben Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen an

a) $f(x) = 5x \implies F(x) = \frac{5}{2}x^2 + C$

b) $x(t) = -\frac{1}{2}t^2 \implies F(t) = -\frac{1}{6}gt^3 + C$

c) $g(x) = (2x - 3) + (x^2 + 1) \implies F(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{3}x^3 + x + C$

d) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \implies F(x) = \ln(x^2 + 1) + C$

e) $h(x) = ye^y \implies F(x) = ye^y - e^y + C$

f) $f(x) = x^2e^x \implies F(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

Bestimmen Sie folgende unbestimmte Integrale

a) $\int 3x^2 \mathrm{d}x = x^3 + C$

b) $\int (x^2 + x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

c) $\int x\sin(x)\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \int \cos(x)\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \sin(x) + C$

d) $\int 4\sin^2(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\sin^3(x) + C$

e) $\int \frac{2x}{x^2 + 7}\mathrm{d}x = \ln(x^2 + 7) + C$

f) $\int \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2 + C$

Anwendungsbeispiele

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt, der zwischen $f(x) = 2x + 4$ und $g(x) = x^2 + 1$ eingeschlossen ist.

Die Funktionen schneiden sich in $x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = 3; -1$

$$F = \int_{-1}^{3} (2x + 4 - x^2 - 1)\mathrm{d}x = \left[x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{3} = 9 + 9 - 9 - \left(1 - 3 + \frac{1}{3}\right) = 11 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}$$

b) Wird die Funktion $f(x)$ um die x-Achse gedreht, entsteht ein Rotationskörper mit dem Volumen $V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x$. Berechnen Sie das Volumen

(i) eines Kegels der Höhe $h = 5$ cm mit Grundkreisradius $r = 2$ cm

$$f(x) = 2 - \frac{2}{5}x \implies$$

$$V = \pi \int_0^5 \left(2 - \frac{2}{5}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^5 (4 - \frac{8}{5}x + \frac{4}{25}x^2\big)\mathrm{d}x = \pi \left[4x - \frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{75}x^3\right]_0^5 =$$
$$20 - 20 + \frac{20}{3} = \frac{20}{3}\pi$$

(ii) einer Kugel mit Radius $r = 3$ cm mit Grundkreisradius $r = 2$ cm

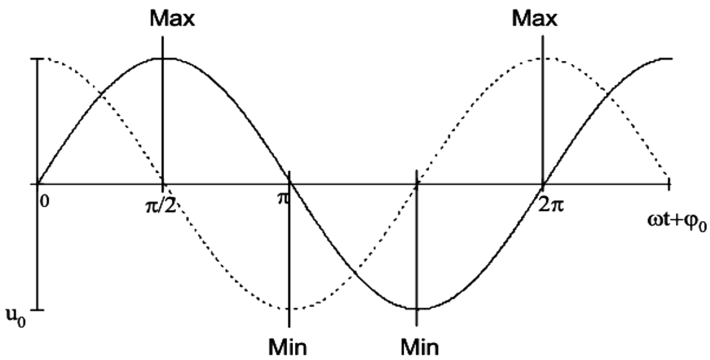
$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} \implies$$

$$V = \pi \int_{-3}^{3} \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\mathrm{d}x = \pi \left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{3} = 36\pi$$

4.7 Anspruchsvolle Aufgaben

Geschwindigkeit, Beschleunigung

Die Geschwindigkeit ist die erste Ableitung, die Beschleunigung die zweite Ableitung der Ortskoordinate nach der Zeit t.
Bei einer harmonischen Schwingung ist $s(t) = u_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$
Zu welchen Zeiten t ist die Auslenkung $s(t)$, zu welchen die Geschwindigkeit $v(t)$ maximal/ minimal?



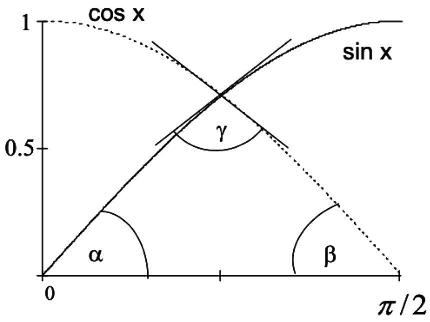
Auslenkung ist maximal:
$v(t) = \dot{s}(t) = u_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = 0 \implies$

$$\omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \implies t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{2k+1}{2}\pi - \varphi_0\right)$$

Maximum: $u_0 \sin(\omega t + \varphi_0) = u_0$ für k gerade
Minimum: $u_0 \sin(\omega t + \varphi_0) = -u_0$ für k ungerade

Von sin und cos eingeschlossene Fläche

Die beiden Kurven $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$ begrenzen mit der x-Achse ein Spitzbogendreieck.



1. Wie groß sind die 3 Winkel des Spitzbogen-Dreiecks?

Die drei Schnittstellen sind bei $x_0 = 0$; $x_1 = \frac{\pi}{4}; x_2 = \frac{\pi}{2}$
Winkel bei $x_0 = 0 : m = \cos(0) = 1 \implies \alpha = 45°$
Winkel bei $x_1 = \frac{\pi}{4}$: $m_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $m_2 = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\implies \tan(\gamma) = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = 2\sqrt{2} \implies \gamma = 70.53°$

Winkel bei x_1 ergibt sich aus der Zeichnung:$180° - 50.53° = 109.47°$
Winkel bei x_2 ergibt sich aus der Zeichnung zu $\beta = 45°$

2. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

$$F = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\mathrm{d}x = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \Big[\sin(x)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$$

geometrische Optimierung

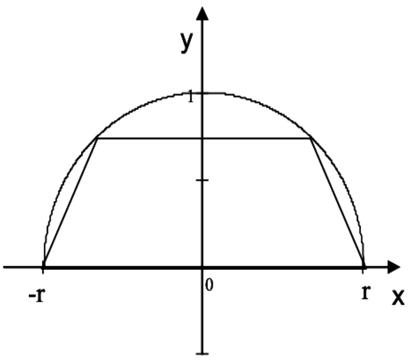
a) In welchem Verhältnis stehen Durchmesser zu Höhe bei einer zylinderförmigen Dose vom Volumen V, wenn man am wenigsten Blech verbrauchen möchte?

Volumen: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h \implies h = \dfrac{V}{\pi r^2}$

Oberfläche: $O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2\dfrac{V}{r}$

Min. der Oberfläche: $A'(r) = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2} = 0 \implies r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$

b) Ein Trapez hat die Fläche (Summe der parallelen Seiten) $\cdot \dfrac{Höhe}{2}$
In einen Halbkreis mit Radius r soll ein gleichschenkliges Trapez eingezeichnet werden, so dass die längere der parallelen Seiten mit dem Durchmesser übereinstimmt.
Der Flächeninhalt soll maximal werden.



Flächeinhalt des Trapezes: $F = \dfrac{1}{2}(2r + 2x) \cdot y$. Wegen $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ist
$F(x) = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$
Für den minimalen Flächeninhalt: $F'(x) = \sqrt{r^2 + x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$

$$\implies 0 = r^2 - x^2 - x(r+x) = -2x^2 - rx + r^2 \implies x_{1,2} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{-4} = r\left(-\frac{1}{4} \pm \left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

$\implies x_1 = -r \implies F(x_1) = 0$: Triviale Minimum Lösung

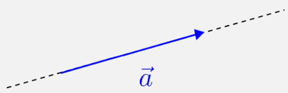
$\implies x_2 = \dfrac{r}{2} F(x_2) = \dfrac{3}{4}\sqrt{3}r^2$: Maximale Fläche

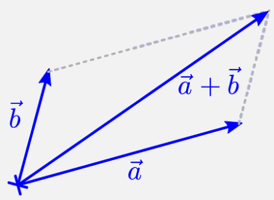
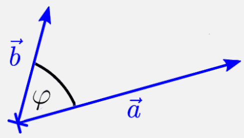
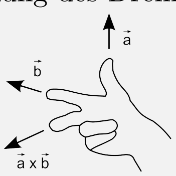
KAPITEL 5

Vektorrechnung

5.1 Definition

Ein Vektor $\vec{a}$ ist eine gerichtete Strecke:
Physikalische Größen, wie Strecke, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft etc. werden durch Vektoren beschrieben.



Länge (Betrag) eines Vektors $\vec{a}$	$\lvert\vec{a}\rvert$
Verlängern / Verkürzen eines Vektors	$\lambda\lvert\vec{a}\rvert$
Resultierende zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$	$\vec{a}+\vec{b}$ 
Skalarprodukt zweier Vektoren (Berechnung der Arbeit $W = \vec{F}\cdot\vec{s}$)	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos(\varphi)$ Dabei ist φ der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel 
Vektorprodukt zweier Vektoren (Berechnung des Drehmoments $\vec{M} = \vec{F}\times\vec{s}$) 	$\vec{a}\times\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\sin(\varphi)\cdot\vec{e}_{a,b}$ $\vec{e}_{a,b}$ ist ein Vektor der Länge 1, der in Richtung der Rechte-Hand-regel zeigt

Berechnung Skalar- und Vektorprodukt

Zwei Vektoren der Längen $a = 5$ cm und $b = 6$ cm liegen in einer Ebene und schließen den Winkel $30°$ ein.
Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und die Vektorprodukte $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{b} \times \vec{a}$.
In welche Richtung zeigen diese jeweils?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| {\cdot} \cos(\varphi) = 30 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 15\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| {\cdot} \sin(\varphi) = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15\ \text{cm}^2$

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht gemäß rechte Handregel senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Der Vektor $\vec{b} \times \vec{a}$ hat die gleiche Länge, zeigt aber in entgegengesetzte Richtung

Hinweise zu den Vektoroperationen:

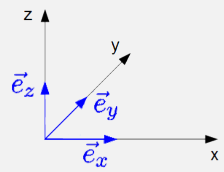
- Multipliziert man einen Vektor mit einem negativen Skalar, so dreht sich seine Richtung um
- Einheitsvektoren sind Vektoren der Länge 1: $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Das Ergebnis des Skalarprodukts entspricht der Projektionslänge von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ oder umgekehrt.
- Bestimmen der zugehörigen Lösungen

Hinweise zu den Vektoroperationen:

- Multipliziert man einen Vektor mit einem negativen Skalar, so dreht sich seine Richtung
- Einheitsvektoren sind Vektoren der Länge 1: $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Das Ergebnis des Skalarprodukts entspricht der Projektionslänge von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ oder umgekehrt.
- Für das Skalarprodukt gilt das Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ergibt: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- Der Betrag des Vektorproduktes entspricht der von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogrammfläche
- Für das Vektorprodukt gilt das Kommutativgesetz nicht: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- Das Vektorprodukt paralleler Vektoren ist der Nullvektor

5.2 Vektoren im kartesischen Koordinatensystem

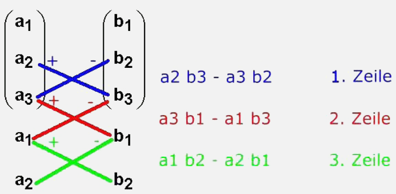
Das kartesische Koordinatensystem hat die Basisvektoren



$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \ \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \ \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für jeden Vektor $\vec{a}$ gilt: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$

Vektoroperationen im kartesischen Koordinatensystem:

Länge (Betrag) eines Vektors $\vec{a}$	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
Verlängern / Verkürzen eines Vektors	$\lambda\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$
Resultierende zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$	$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$
Skalarprodukt zweier Vektoren	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
Vektorprodukt zweier Vektoren Merkregel:	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$ 

Kräftegeichgewicht

Welche Gegenkraft $\vec{F}$ hebt die vier Einzelkräfte in ihrer physikalischen Wirkung auf?

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -220\ \text{N} \\ 110\ \text{N} \\ -60\ \text{N} \end{pmatrix} ; \ \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -20\ \text{N} \\ 40\ \text{N} \\ -60\ \text{N} \end{pmatrix} ; \ \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 40\ \text{N} \\ 95\ \text{N} \\ 120\ \text{N} \end{pmatrix} ; \ \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} -20\ \text{N} \\ 50\ \text{N} \\ -60\ \text{N} \end{pmatrix} ;$$

Die Gegenkraft ist: $\vec{F}_g = -\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4\right) = \begin{pmatrix} 220\ \text{N} \\ -295\ \text{N} \\ 60\ \text{N} \end{pmatrix}$

senkrechter Vektor

a) Geben Sie einen Vektor senkrecht zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Prüfen Sie, ob die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufeinander senkrecht stehen.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 - 2 + 3 = 0 \implies$ Die Vektoren stehen senkrecht.

c) Geben Sie einen beliebigen, zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrechten Vektor $\vec{v}$ an.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektoroperationen mit kartesischen Koordinaten

Gegeben sind die folgenden Vektoren: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Berechnen Sie die folgenden Vektoren:

$$\vec{v} - \vec{w} + \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$3\vec{u} - 2\vec{w} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2) Berechnen Sie die Länge der Vektoren:

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

3) Berechnen Sie die fünf Winkel je zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$, der y- und der z-Achse

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\varphi) \implies \cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{28}} = 0.377964 \ \varphi = 67.79^\circ$$

Winkel zur y-Achse:

$$\vec{u} \cdot \vec{e_y} = |\vec{u}| \cdot |\vec{e_y}| \cos(\varphi) \implies \cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{14}} \implies \varphi = 57.7^\circ$$

$$\vec{v} \cdot \vec{e_y} = |\vec{v}| \cdot |\vec{e_y}| \cos(\varphi) \implies \cos(\varphi) = \frac{0}{\sqrt{2}} \implies \varphi = 90^\circ$$

Winkel zur z-Achse:

$$\vec{u}\cdot\vec{e_z} = |\vec{u}|\cdot|\vec{e_z}|\cos(\varphi) \Longrightarrow \cos(\varphi) = \frac{3}{\sqrt{14}} \quad \Longrightarrow \varphi = 36.7^\circ$$

$$\vec{v}\cdot\vec{e_z} = |\vec{v}|\cdot|\vec{e_y}|\cos(\varphi) \Longrightarrow \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \varphi = 45^\circ$$

4) Berechnen Sie die Skalarprodukte

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = 1-2+3=2$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = -1-0+1=0$$

5) Berechnen Sie die Vektorprodukte $\vec{u}\times\vec{w}$ und $\vec{v}\times\vec{w}$

$$\vec{u}\times\vec{w} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 3-1 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 1+1 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.3 Geraden

Eine Gerade g lässt sich durch Ihre Ortsvektoren $\vec{x}(t)$ beschreiben:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{a},$$

wobei $\vec{x}_0$ der Stützvektor bzw. Aufpunkt ist und $\vec{a}$ der Richtungsvektor.

Zwei Geraden $g_1 : \vec{x}_1(t) = \vec{s}_1 + t\vec{a}_1$; $g_2 : \vec{x}_2(t) = \vec{s}_2 + t\vec{a}_2$

identisch	$\vec{a}_1 = k\vec{a}_2$ mit $k\in\mathbb{R}$ und $\vec{s}_1 \in g_2$
parallel	$\vec{a}_1 = k\vec{a}_2$ mit $k\in\mathbb{R}$ und $\vec{s}_1 \notin g_2$
schneiden sich	$\vec{a}_1 \neq k\vec{a}_2$ für alle $k\in\mathbb{R}$ und Gleichsetzen liefert eine Lösung
sind windschief	$\vec{a}_1 \neq k\vec{a}_2$ für alle $k\in\mathbb{R}$ und Gleichsetzen liefert keine Lösung

Geradengleichung

a) Wie lautet die Vektorgleichung der Geraden g durch den Punkt $P_1(1|5|10)$ parallel zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

$$\vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Welche Punkte gehören zu den Parameterwerten $\lambda = -3$ und $\lambda = 5$?

$$\vec{x}(\lambda) = \vec{x}(-3) = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} ;\ \vec{x}(5) = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Welche Punkte auf g haben von P_1 den Abstand $d = 6$?

$$|\vec{x}(\lambda)| = 6 = \left| \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{9\lambda^2} = 3|\lambda|$$

$$\Longrightarrow \lambda = \pm 2$$

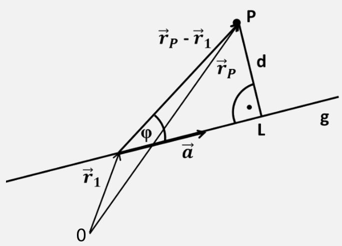
$$\Longrightarrow P_2 = \vec{x}(2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} ;\ P_3 = \vec{x}(-2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b) Geben Sie die Gerade $y = 2x + 1$ aus dem $\mathbb{R}^2$ in Vektorschreibweise an.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Abstandsberechnung:

Abstand Punkt $\vec{x}_p$ zur Gerade $\quad d = \dfrac{|\vec{a} \times (\vec{x}_p - \vec{s})|}{|\vec{a}|}$



Abstand zweier paralleler Geraden $\vec{x}_p$ zur Gerade $\quad d = \dfrac{|\vec{a} \times (\vec{s}_2 - \vec{s}_1)|}{|\vec{a}|}$

Abstand zweier windschiefer Geraden $\vec{x}_p$ zur Gerade $\quad d = \dfrac{|(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot (\vec{s}_2 - \vec{s}_1)|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$

Abstandsberechnung

a) Eine Gerade g durch $P(2|2|1)$ mit Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ hat welchen Abstand zu den Punkten $A(5|10|3)$ und $B(-1|8|-14)$?

$$d_A = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{2301}}{\sqrt{30}} = 8.758$$

$$d_B = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2}} = 0$$

b) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Geraden

$$g_1:\ \vec{x}(t)=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ \text{und}\ g_2:\ \vec{x}(t)=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Die Geraden sind nicht parallel, daher:

$$d=\frac{|(\vec{x}_2\times\vec{x}_1)\cdot(\vec{a}_1-\vec{a}_2)|}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}=\frac{\left|\left(\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right|}=$$

$$\frac{\left|\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right|}=\frac{|2-2-4|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

c) Wie groß ist der Abstand der Geraden $g:\ \vec{x}(t)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ vom Ursprung?

$$d=\frac{|(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\times\vec{a}|}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}-3\\3\\-3\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

5.4 Ebenen

Eine Ebene E lässt sich durch Ihre Ortsvektoren $\vec{x}(t)$ beschreiben:

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_0+t\vec{a}+s\vec{b},$$

wobei $\vec{x}_0$ wieder der Stützvektor ist und $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Richtungsvektoren.

Zwei Geraden $g_1:\vec{x}_1(t)=\vec{s}_1+t\vec{a}_1;\ g_2:\vec{x}_2(t)=\vec{s}_2+t\vec{a}_2$

Normalenvektor auf die Ebene:	$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$
Normalendarstellung der Ebene:	$\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)=0$

Bestimmen Sie folgende Ebenen

- Gegeben: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

  $E: \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

- Die Ebene enthält die Gerade $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und den Punkt $Q(1|4|3)$.

  Geben Sie die Gleichung der Ebene in der Parameterdarstellung und in der Koordinatendarstellung an.

  $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1-1 \\ 4-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

  $E: \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$

  $E: \; -12x - 4y + 4z = -16 \iff -3x - y + z + 4 = 0$

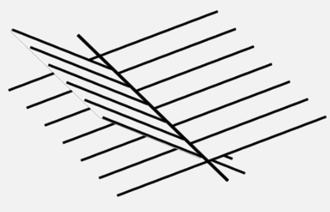
5.5 Lagebestimmung

Eine Gerade $g: \; \vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{a}$ und eine Ebene $E: \; \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_E) = 0$

fallen zusammen	falls $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ und $\vec{x}_E \in g$
sind parallel	falls $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ und $\vec{x}_E \notin g$
schneiden sich	falls $\vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0$

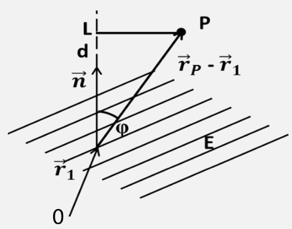
Zwei Ebenen $E_1: \; \vec{n}_1(\vec{x} - \vec{x}_{E_1})$ und $E_2: \; \vec{n}_2(\vec{x} - \vec{x}_{E_2})$

fallen zusammen	falls $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ und $\vec{x}_{E_1} \in E_2$
sind parallel	falls $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ und $\vec{x}_{E_1} \notin E_2$
schneiden sich	falls $\vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2$



Abstand Punkt-Ebene:

Abstand Punkt $\vec{x}_P$ zur Ebene $d = \dfrac{|\vec{n} \cdot (\vec{x}_P - \vec{x}_E)|}{|\vec{n}|}$



Bestimmen Sie folgende Ebenen

a) Die Ebene E geht durch den Punkt $P(5|-1|3)$ und hat den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Welchen Abstand haben die Punkte $A(10|3|8)$ und $B(0|2|11)$ zur Ebene? Berechnen Sie z so, dass der Punkt $C(2|-4|z)$ auf der Ebene liegt.

Welchen Abstand haben die Punkte A(10|3|8) und B(0|2|11) zur Ebene?

$$d_A = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_A) - \vec{r}_1}{|\vec{n}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3,46$$

$$d_B = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_B) - \vec{r}_1}{|\vec{n}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right|}{\sqrt{3}} = 0$$

Berechnen Sie z so, dass der Punkt C(2|-4|z) auf der Ebene liegt.

E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0 \Longleftrightarrow x - y + z = 9$

C in E: $2 + 4 + z = 9 \Longrightarrow z = 3$

b) Berechnen Sie die Schnittgerade der Ebene mit Aufpunkt $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit der $x - y$-Ebene.

Bestimmen Sie dann die Funktion $y = f(x)$ für diese Gerade.

vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit der x-y-Ebene

E: $-2x + y + 3z = 3$

$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ein Schnittpunkt: (-1,1,0)

Schnittgerade: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

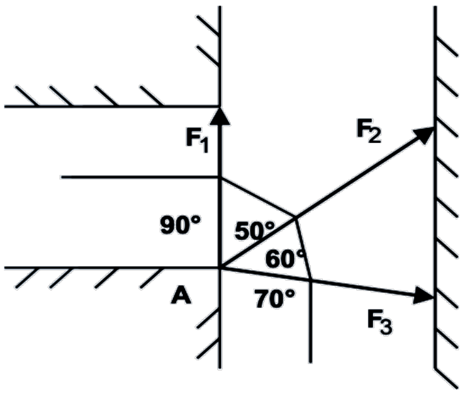
Bestimmen Sie dann die Funktion y = f(x) für diese Gerade

$x(t) = -1 + t; y(t) = 1 + 2t \Longrightarrow y = f(x) = 1 + 2(x + 1) = 2x + 3$

5.6 Anspruchsvolle Aufgaben

Straßenbahn

Die drei Haltedrähte der Oberleitung einer Straßenbahn in einer Kurve sind in einem Punkt A eines Hauses befestigt. Die Richtung der drei Zugkräfte sind dem Lageplan zu entnehmen. Gesucht ist die Größe und Richtung der Gesamtkraft. Ihre Richtung ist durch den Winkel zur x-Achse anzugeben.
Gegeben: $F_1 = 1050$ N; $F_2 = 1500$ N; $F_3 = 1200$ N:



$$F_1 = 1050\,\mathrm{N}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ F_2 = 1050\,\mathrm{N}\begin{pmatrix} \cos(40°) \\ \sin(40°) \end{pmatrix};\ F_3 = 1050\,\mathrm{N}\begin{pmatrix} \cos(-20°) \\ \sin(-20°) \end{pmatrix}$$

$$F_g = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \begin{pmatrix} 2276.7 \\ 1603.8 \end{pmatrix}\ \mathrm{N}$$

$$|F_g| = 2784.85\ \mathrm{N}$$

$$\alpha_g = \arccos\left(\frac{F_x}{F_g}\right) = 35.16°$$

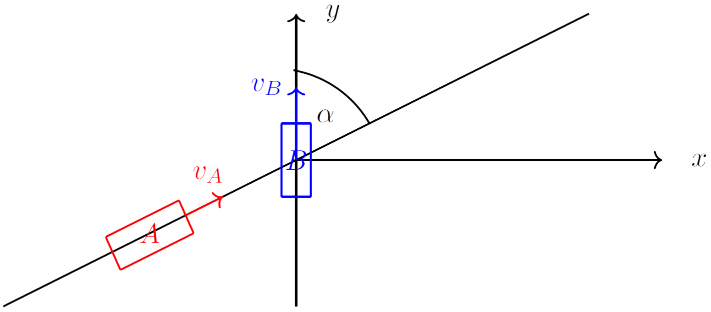
Kreisbahn

Eine Kreisbahn mit Radius r werde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω durchfahren, so dass $\varphi = \omega \cdot t$, mit der Zeit t als Parameter, gilt.
Geben Sie zu jeder Zeit den Ort $\vec{s}(t)$ und dessen Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ an.
Wie groß ist die Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}(t)$ (= 2. Ableitung des Ortes nach der Zeit t)?

$$s(t) = r\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix};\ v(t) = r\omega\begin{pmatrix} \text{-}\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix};\ a(t) = -r\omega^2\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Zwei Fahrzeuge im $\mathbb{R}^2$

Zwei Autos, Auto A und Auto B, passieren mit den konstanten Geschwindigkeiten $v_A = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $v_B = 20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ die Kreuzung zweier unter dem Winkel $\alpha = 60°$ sich schneidender Straßen. Zum Zeitpunkt t =0 befinde sich Auto B genau in der Kreuzung, Auto A im Abstand 100 m.



1) Geben Sie die Geschwindigkeitsvektoren für Auto $A(\vec{v}_A)$ und für Auto $B(\vec{v}_B)$ im angegebenen $x - y$-Koordinatensystem an.

$$\vec{v}_A = 60 \begin{pmatrix} \cos(30°) \\ \sin(30°) \end{pmatrix} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\vec{v}_B = 20 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

2) Geben Sie den Vektor $\vec{r}_{AB}$ von Auto A zu Auto B im angegebenen Koordinatensystem in Abhängigkeit der Zeit t an.

$$\vec{r}_A = 30t \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \text{km} - 0.05 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \text{km}$$

$$\vec{r}_B = 20t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{km}$$

3) Welche Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_{rel}$ hat Auto A gegenüber Auto B?

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_A - \vec{v}B = 30t \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\text{km}}{\text{h}} - 20 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\text{km}}{\text{h}} = \begin{pmatrix} 30\sqrt{3} \\ 10 \end{pmatrix} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Abstände in geometrischen Objekten

a) Welchen Abstand haben die Ecken eines Rechtecks mit $a = 8$ und $b = 6$ von der Diagonalen?

Wir berechnen den Abstand des Punktes (8,0,0) von der Diagonalen: $\vec{x}(t) = t \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{48}{10} = 4.8$$

b) Berechnen Sie den Abstand der Seitendiagonalen von den Raumdiagonalen im Würfel der Kantenlänge a, die sich nicht schneiden, und suchen Sie dann die Punkte auf beiden Geraden, die den kleinsten Abstand zur jeweils anderen haben.

Die Gleichung der Raumdiagonalen ist: $\overrightarrow{x}(t) = t \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$

Die Gleichung der Seitendiagonalen ist: $\overrightarrow{x}(s) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$

$$d = \frac{|(\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}) \cdot (\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2})|}{|\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2 \\ -a^2 \\ 2a^2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -a^2 \\ -a^2 \\ 2a^2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{a^3}{\sqrt{a^4 + a^4 + 4a^4}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Verbindung zwischen den Diagonalen: $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} a - sa - ta \\ sa - ta \\ -ta \end{pmatrix}$

Punkt auf der Raumdiagonalen:

$$0 = \overrightarrow{r} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a^2 - sa^2 - ta^2 + sa^2 - ta^2 - ta^2 = a^2(1 - 3t) \Longrightarrow t = \frac{1}{3}$$

$P(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a)$

Punkt auf der Seitendiagonalen:

$$0 = \overrightarrow{r} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = -a^2 + sa^2 + ta^2 + sa^2 - ta^2 = a^2(-1 + 2s) \Longrightarrow s = \frac{1}{2}$$

$P(\frac{1}{a}a, \frac{1}{a}a, 0)$